

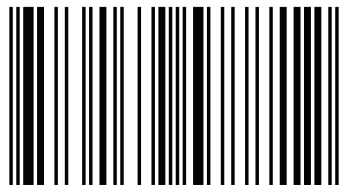
Шумові сигнали та їх характеристики

Монографія присвячена результатам досліджень шумових сигналів у різних предметних областях, включаючи електроніку, радіофізику, гідроакустику, вібродіагностику тощо. Відповідну увагу приділено математичній моделі шумового сигналу. Розглянуто особливості комп'ютерного моделювання реалізацій шумових сигналів. Значну увагу приділено статистичному оцінюванню характеристик стаціонарних шумових сигналів. Для аналізу нестационарних шумових сигналів досліджено виявлення миттєвих часових моментів розладу сигналів, за умови, що такий сигнал можна розглядати як кусково-стаціонарний на різних інтервалах стаціонарності. З метою оцінювання ефективності, точності та граничних можливостей методу виявлення миттєвих часових моментів розладу шумових сигналів проведено експериментальне дослідження часових рядів шумових сигналів.

Ганна Мартинюк
Леонід Щербак

Шумові сигнали та їх характеристики

Мартинюк Ганна Вадимівна, кандидат технічних наук, Національний авіаційний університет, м. Київ; Щербак Леонід Миколайович, доктор технічних наук, професор, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, Київський міжнародний університет, м. Київ



978-613-9-57771-2

Мартинюк, Щербак

 **LAMBERT**
Academic Publishing

**Ганна Мартинюк
Леонід Щербак**

Шумові сигнали та їх характеристики

**Ганна Мартинюк
Леонід Щербак**

**Шумові сигнали та їх
характеристики**

LAP LAMBERT Academic Publishing RU

Imprint

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:

LAP LAMBERT Academic Publishing

is a trademark of

International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page

ISBN: 978-613-9-57771-2

Copyright © Ганна Мартинюк, Леонід Щербак

Copyright © 2018 International Book Market Service Ltd., member of
OmniScriptum Publishing Group

All rights reserved. Beau Bassin 2018

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
РОЗДІЛ 1. ПРОБЛЕМАТИКА ДОСЛІДЖЕНЬ ШУМОВИХ СИГНАЛІВ	5
1.1. Шумовий сигнал як об'єкт досліджень	5
1.2. Предметні області використання шумових сигналів	10
1.3. Основні моделі шумових сигналів	13
1.4. Характеристики шумових сигналів.....	18
1.5. Приклади типових шумових сигналів.....	21
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ШУМОВИХ СИГНАЛІВ.....	25
2.1. Основи математичного моделювання шумових сигналів.....	25
2.2. Загальна модель шумового сигналу	28
2.3. Модель шумового сигналу у часовій області – лінійний випадковий процес	32
2.4. Модель шумового сигналу у часовій області – гармонізований випадковий процес	35
РОЗДІЛ 3. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ШУМОВИХ СИГНАЛІВ.....	39
3.1. Особливості комп'ютерного моделювання шумових сигналів.....	39
3.2. Дослідження генераторів псевдовипадкових чисел для моделювання шумових сигналів.....	42
3.3. Основи створення алгоритмічно-програмного забезпечення для моделювання шумових сигналів.....	47
РОЗДІЛ 4. СТАТИСТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦІОНАРНИХ ШУМОВИХ СИГНАЛІВ.....	51
4.1. Статистичне оцінювання характеристик стаціонарних процесів	51
4.2. Статистичне оцінювання стаціонарності шумового сигналу.....	61

4.3. Статистичне оцінювання часових характеристик стаціонарного шумового сигналу	64
4.4. Статистичне оцінювання спектральних характеристик стаціонарного шумового сигналу	69
РОЗДІЛ 5. СУЧАСНИЙ НАПРЯМ СТАТИСТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ШУМОВИХ СИГНАЛІВ	75
5.1. Метод «Гусениця-SSA» для виділення трендової складової шумового сигналу.....	75
5.2. Метод виявлення миттєвих розладів часових рядів для знаходження інтервалів стаціонарності шумових сигналів	78
5.3. Критерій Хартігана для перевірки шумового сигналу на унімодальність	83
5.4. Дослідження ефективності використання методу виявлення миттєвих розладів часових рядів шумових сигналів	85
ПІДСУМКИ	93
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	97

ПЕРЕДМОВА

Монографія присвячена результатам досліджень шумових сигналів у різних предметних областях, включаючи електроніку, радіофізику, гідроакустику, вібродіагностику тощо. Слід відмітити, що, враховуючи потужний інформаційний ресурс шумових сигналів, потенційні можливості їх використання на сьогодні не вичерпані при створенні сучасних інформаційних технологій, розробці програмно-апаратних інформаційних та керуючих систем.

Матеріали у даній монографії висвітлюють проблематику шумових сигналів у більш комплексному, широкому сенсі. Розглядаючи шумові сигнали як предмет досліджень можна оцінити і корисну інформацію, наприклад про стан і режим функціонування технічних систем. Такий підхід використаний при вирішенні науково-технічних проблем вібродіагностики. Значна увага приділена одному з основних об'єктів досліджень шумових сигналів – його математичній моделі. Теоретичним фундаментом досліджень шумових сигналів є граничні теореми суми незалежних випадкових величин, що знайшло подальший розвиток у теорії лінійних і гармонізованих випадкових процесів і полів. Практичним обґрунтуванням таких досліджень є стохастичний інтегральний фізичний механізм формування шумових сигналів і їх розповсюдження у різних середовищах.

Відповідна увага приділена комп'ютерному моделюванню реалізацій шумових сигналів. При цьому еталонним шумовим сигналом вважається процес білого шуму. Така ідеалізована модель при практичній реалізації має результати статистичного оцінювання, в першу чергу, у рамках кореляційної теорії, що і наведено.

Монографія складається з п'яти розділів.

У першому розділі розглянуто загальну проблематику досліджень шумових сигналів. Показано як шумовий сигнал може виступати в якості об'єкту

досліджень, а також предметні області його використання. Значну увагу приділено моделям шумових сигналів та їх характеристикам.

Другий розділ присвячено задачам математичного моделювання шумових сигналів. Розглянуто узагальнену модель шумового сигналу як трикомпонентного векторного випадкового процесу, а також лінійний і гармонізований випадковий процес як складові загальної моделі шумового сигналу.

У третьому розділі наведено результати комп'ютерного моделювання реалізацій шумових сигналів. Значну увагу приділено дослідженню генераторів псевдовипадкових чисел, які використовуються при моделюванні шумових сигналів для реалізацій білого шуму.

Результати статистичного оцінювання характеристик стаціонарних і кусково-стаціонарних шумових сигналів у рамках кореляційної теорії наведено у четвертому розділі. Необхідно відмітити, що ґрунтовно описано оцінювання як часових, так і спектральних характеристик стаціонарних шумових сигналів.

На практиці шумові сигнали зазвичай не можна безпосередньо описати стаціонарними моделями. Тому, необхідно вирішувати задачу пошуку таких шляхів попередньої обробки інформаційних сигналів, які б дозволяли виділяти інтервали, на яких сигнали можна розглядати як умовно або кусково-стаціонарні. Саме такому сучасному напрямку статистичного оцінювання характеристик шумових сигналів присвячено п'ятий розділ монографії.

Матеріали даної монографії можуть бути використані для студентів вищих навчальних закладів, наукових співробітників і фахівців у галузях математичного і комп'ютерного моделювання, статистичного оцінювання даних моніторингу випадкових процесів.

РОЗДІЛ 1. ПРОБЛЕМАТИКА ДОСЛІДЖЕНЬ ШУМОВИХ СИГНАЛІВ

1.1. Шумовий сигнал як об'єкт досліджень

Початок розвитку прикладного і практичного застосування методів шумометрії умовно можна віднести до 20-30-х років XX століття, в період стрімкого розвитку електротехніки, електроніки та радіотехніки. Але теоретичні засади шумометрії були закладені значно раніше, в працях відомого вченого теорії ймовірності Якоба Бернуллі в кінці XVII і на початку XVIII століть. Пізніше в 30-х роках XX століття вченими Колмогоровим, Леві і Хінчінім були доведені граничні теореми безмежно подільних законів розподілу суми незалежних випадкових величин.

Термінологія шумометрії не є загальноприйнятною і тому потребує певного означення і тлумачення. Наведемо деякі з них базуючись на напрями досліджень теорії сигналів і систем. В технічній літературі шумовий сигнал не має чіткого означення, але при описі фізичних процесів в електронних системах шумовий сигнал розглядається як сумарний ефект дії значної кількості елементарних джерел. Прикладом таких шумових сигналів є дробовий шум. Математичною ідеалізацією шумових сигналів є випадкові процеси «білого» або «фарбованого» шумів.

На сьогодні шумові сигнали охоплюють широкий діапазон різних сигналів. Наведемо наступне означення шумового сигналу.

Шумовий сигнал – це інтегрована сума сформованих в часі і в просторі значної кількості елементарних імпульсних сигналів стохастичної фізичної природи під дією енергетичних впливів різних збурень.

Сигналами шумової діагностики є сигнали різної фізичної природи в тому числі вібраційні, віброакустичні, сигнали акустичної емісії, дробові, теплові і фліккер-шуми в електронних і радіоелектронних пристроях, аеродинамічні

шуми турбін, компресорів і двигунів, електромагнітні шуми електричних машин, шумові процеси в трубопроводах та інші [4, 24, 33, 35 – 36, 52, 56].

Процес формування і розповсюдження шумових сигналів як у досліджуваних фізичних середовищах, так і технічних об'єктах і системах відображаються динамікою в часі і в просторі відповідними характеристиками таких сигналів.

Слід виділити два принципово протилежні напрями постановок актуальних і важливих на сьогодні задач аналізу шумових сигналів, а саме:

- класичні задачі зменшення впливу шумових сигналів при передаванні, прийманні, виявленні, перетворенні та опрацюванні сигналів при дії завад в телекомунікаційних та інших інформаційних системах;

- шумові сигнали є предметом досліджень, інформаційний ресурс яких у значній мірі доповнює відомі, а в ряді випадків визначає основні характеристики динаміки в часі і в просторі стану і режимів функціонування досліджуваних об'єктів .

Можна також відмітити наступну характерну особливість аналізу шумових сигналів про те, що незважаючи на різні постановки задач двох указаних напрямів досліджень, отримані результати вимірювань в повній мірі сприяли, сприяють і будуть сприяти у майбутньому розвитку, як кожного із окремих напрямів, так і у шумометрії в цілому.

На основі аналізу результатів науково-технічних публікацій, використання сучасних інформаційних вимірювальних технологій при дослідженнях шумових сигналів у різних проблемних областях, в тому числі [34 – 38, 40, 52, 56], можна привести узагальнену структуру реалізації задач аналізу шумових сигналів, яка наведена на рис. 1.1.

На рис. 1.1 прийнято такі позначення: 1 - досліджені явища, об'єкти і процеси, інформація для вимірювань; 2 - фізичні і математичні моделі, характеристики в часі і в просторі шумових сигналів; 3 - фізичні методи, варіанти реалізації сенсорних засобів (первинних вимірювальних

перетворювачів); 4 - методи, варіанти реалізації засобів формування фізичних мір одиниць величин вимірювань, отримання даних вимірювань; 5 - статистичні методи опрацювання даних вимірювань, обґрунтування ймовірнісних мір (мір невизначеності) результатів вимірювань; 6 - еквівалентне джерело завад; 7 - методи і варіанти реалізації засобів захисту інформації для вимірювань.

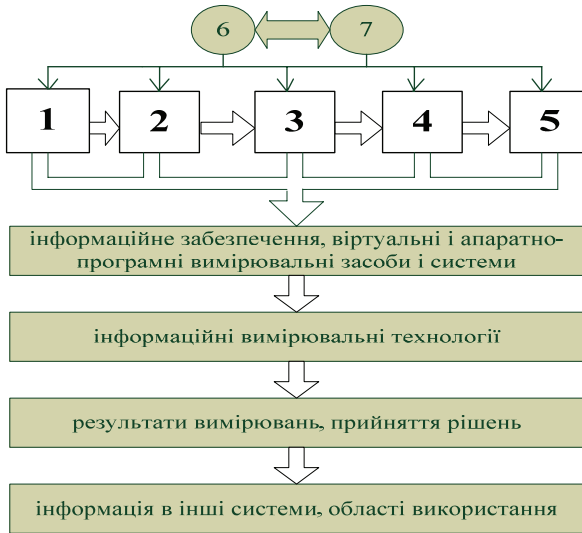


Рис. 1.1. Узагальнена структура реалізації задач шумометрії

Одним із основних завдань при дослідженні шумових сигналів, яке по суті об'єднує вирішення наведених вище проблем шумометрії, є обґрунтування фізичної та відповідно математичної моделі сигналу. У більшості випадків така модель враховує основні властивості, характерні особливості, апіорні дані, фізичний механізм формування сигналу.

У більшості випадків обґрунтування математичної моделі шумового сигналу починається з такого виразу

$$\xi_n(\omega, t) = \sum_{i=1}^n \zeta_i(\omega) h_i(\tau_i, t), \quad \omega \in \Omega, t \in T, \quad (1.1)$$

який відображає наступний фізичний механізм формування досліджуваного сигналу.

Будь який фізичний процес відбувається у часі i в просторі. Тому, якщо представити вираз (1.1) у виді

$$\xi_n(\omega; \mathbf{r}_j; t) = \sum_{i=1}^n \zeta(\omega; \mathbf{r}_i; \tau_i) h_i(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i; \tau_i, t), \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \in G, \quad (1.2)$$

то такий вираз більш точно описує фізичний механізм прийому шумового сигналу в просторовій точці, у загальному випадку $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j) \in G \subseteq R^3$, в момент спостереження часу $t \in T$.

Складова $\zeta_i(\omega; \mathbf{r}_i; \tau_i)$ описує випадкову інтенсивність елементарного імпульсу збурення, який сформований дією енергетичного впливу в момент часу τ_i в просторовій точці $\mathbf{r}_i \in G$ у виді випадкової величини $\zeta_i(\omega; \mathbf{r}_i; \tau_i) \in R$. Невипадкова функція $h_i(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_i; \tau_i, t)$ описує функціональну залежність розповсюдження в досліджуваному середовищі елементарного імпульсу, який сформований в момент τ_i в точці простору \mathbf{r}_i , в просторову точку $\mathbf{r}_j \in G$ в момент спостереження $t \in T$.

Слід відмітити фізичні розмірності складових компонентів для наступних двох випадків :

а) при умові, що вхідна величина первинного вимірювального перетворювача (сенсора, давача) і вихідна мають одну розмірність, наприклад, В або А, то $\zeta_i(\bullet)$ має розмірність цієї величини, а $h_i(\bullet)$ – безрозмірна функція;

б) якщо вказані величини перетворення мають різні розмірності, наприклад, вхідна – Па, вихідна В, то $\zeta_i(\bullet)$ – має розмірність вхідної величини – Па, а $h_i(\bullet)$ – розмірність $\frac{В}{Па}$.

Аналіз таких складових у виразі (1.2), як $\xi_n(\omega; \mathbf{r}_j; t) \in R, \omega \in \Omega; \mathbf{r}_j \in G; t \in T$ при фіксованих просторових координатах у загальному вигляді майже не проводиться, використовуються різні додаткові обмеження, певної міри

ідеалізації, тому вираз (1.1), як правило використовується для подальшого узагальнення. При цьому у більшості випадків при доведенні граничних теорем приймається умова, що число елементарних імпульсів зростає і прямує $n \rightarrow \infty$.

Вважається, що шумовий сигнал формується в обмеженій просторовій області, а сам процес формування і накопичення сигналу є сумою послідовностей вказаних компонент, тобто формування шумового сигналу відбувається в просторовій області, де виконується принцип суперпозиції.

Слід відмітити, що результати наукових праць по аналізу шумових сигналів мають різноплановий характер. У деяких публікаціях шумові сигнали вважаються завадами, в інших – інформаційними сигналами. Проте, треба зазначити, що поділ на інформаційні сигнали і завади є умовним і визначається постановкою задачі. Процеси теплових, дробових і фліккер-шумів, які виникають в радіоелектронних системах в одних роботах є основними об'єктами досліджень як інформаційні сигнали, а в інших – завадами.

Завади можна умовно класифікувати наступним чином:

- до природних земних завад відносять імпульсні атмосферні розряди, сейсмічні та геофізичні збурення, гідроакустичні шумові поля, електромагнітне випромінювання різних земних об'єктів, явищ;

- до неземних – космічне випромінювання сонця, зірок та інших космічних об'єктів;

- до індустриальних – випромінювання, як електромагнітне, так і вібраційне, акустичне, оптичне в широкому діапазоні частот енергетичного, радіоелектронного обладнання, механічних комплексів та інше.

Спроба узагальнити дії завад на технічні системи, на наш погляд, знайшла вдале втілення при розв'язанні задач електромагнітного сумісництва функціонування сукупності радіолокаційних, радіотехнічних систем зв'язку, інших радіоелектронних систем, наприклад, на надводних військових кораблях, тобто в місцях компактного розташування таких систем при одночасній їх

роботі. Такий випадок роботи систем може служити конкретним прикладом, коли для однієї системи сигнал є інформаційним, а для інших – завадою.

Про використання шумових сигналів в якості інформаційних більше детально буде описано у наступних підрозділах.

1.2. Предметні області використання шумових сигналів

Застосування шумів може базуватися на тому, що шумовий сигнал є широкосмуговим, має малу амплітуду, може бути некорельованим у частотних смугах, що не перетинаються. Але досить часто використовується одразу декілька властивостей шумових сигналів, що ускладнює однозначну класифікацію шумів за характером їх використання. Для простоти вивчення та систематизації типів використання шумів пропонується наступна класифікація шумів за ситуаціями, де вони можуть грати корисну роль (рис. 1.2).

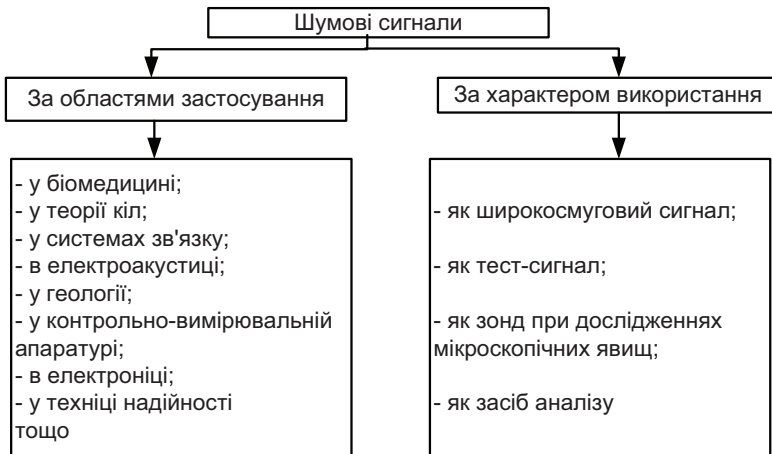


Рис. 1.2. Класифікація шумових сигналів

Зупинимося більш детально класифікації шумових сигналів за характером їх використання.

Використання шумового сигналу як широкосмугового випадкового сигналу. Випадковий сигнал може бути некогерентним та широкосмуговим, слугувати для виявлення джерела шуму, моделювання випадкової величини та генерування іншої випадкової величини. Завдяки цим властивостям шумовий сигнал знаходить застосування в системах радіопротидії, для моделювання випадкових величин, стохастичних обчислень та генерування випадкових чисел.

Моделювання випадкових явищ. Шумові генератори застосовуються для моделювання випадкових величин при оцінці та перевірці систем. Часто необхідно провести перевірку нових радіолокаційних систем (РЛС) або гідролокаторів в реальних робочих умовах та навчити операторів без розгортання станцій. Для цього розробляються електронні моделюючі пристрої, які видають такі самі сигнали, як сигнали, з якими станція працює в реальних умовах. Шумові генератори є невід'ємною частиною таких пристроїв.

Можливості візуального виявлення сигналу на фоні шумів використовуються при моделюванні РЛС, а також, наприклад, при реєстрації сейсмічних сигналів. Аналогічні дослідження розбірливості звукових сигналів у присутності шумів проводяться при оцінці систем мовного зв'язку та у фізичній акустиці. Усі вимірювання такого роду можна порівняти зі зміною коефіцієнта шуму. Шумові сигнали використовуються також для моделювання випадкових вібрацій у механічних системах.

Виявлення джерела сигналів і визначення його місцезнаходження шляхом вимірювання шумів. Випромінювання в інфрачервоній області спектру використовується для пошуку та стеження за ціллю, контролю температури і хімічного складу, а також для інших задач військового та промислового характерів. Шуми на надвисоких та радіочастотах слугують для виявлення та ідентифікації атмосферних процесів. Акустичні шуми киплячих рідин та вібруючих елементів в енергетичних ядерних реакторах приймаються спеціальними датчиками для виявлення несправностей або визначення їх розташування.

Використання шумів у системах радіопротидії. У сучасних РЛС існує швидка перебудова частоти на декілька сотень мегагерц. Тому для організації завод необхідно, щоб джерело завод мало потужність, рівномірно розподілену за смугою частот, яка перекриває частоти РЛС. Така завод носить назву широкосмугової загороджувальної завод. Інший варіант радіопротидії – джерело завод повинно автоматично підстроюватися на робочу частоту РЛС, тобто виникає вузькосмугова або прицільна завод.

Широкасмугові завод найбільш ефективні, але менш вигідні енергетично. Таку завод генерує або джерело шуму з центральною частотою, яка дорівнює частоті несної, або в якості завод виступає неперервний сигнал, модульований шумом. Перевагою генераторів високочастотних шумів є те, що сигнал в смугах частот, які не перетинаються, є некорельованим.

Використання шуму як випадкового тест-сигналу при вимірюваннях. Досить часто при вимірюваннях потрібен широкосмуговий сигнал з точно відомими властивостями, наприклад, функцією щільності ймовірностей, середньоквадратичним значенням або автокореляційною функцією. Генератори таких сигналів – шумові генератори, статистичні характеристики яких або заздалегідь відомі, або можуть бути підібрані. Завдяки цьому шуми використовуються при вимірюваннях імпульсних характеристик, лінійності та взаємної модуляції в апаратурі зв'язку, а також в радіодальномірах з шумовою модуляцією.

Використання шумів при вимірюваннях фізичних параметрів. Шуми дозволяють визначати такі параметри життєвого циклу носіїв заряду у напівпровідниках, фундаментальні фізичні константи, константи пристроїв, а також перевіряти однорідність напівпровідникових матеріалів та оцінювати надійність напівпровідникових пристроїв.

Використання шумів як засобу аналізу. Теорія шумів широко використовується не тільки при розробці теорії інформації та статистичної теорії зв'язку. Шуми самі по собі цікаві як предмет вивчення, також вони корисні як

засіб для теоретичних досліджень та моделювання фізичних систем. Наприклад, теплові шуми резистора слугують моделлю флуктуацій в лінійній системі з втратами, яка знаходиться в стані термодинамічної рівноваги.

1.3. Основні моделі шумових сигналів

У процесі виконання завдань вимірювань для опису досліджуваних реальних сигналів використовуються як детерміновані так і випадкові математичні моделі. Відповідно детерміновані сигнали описуються детермінованими функціями, а випадкові сигнали – випадковими функціями (процесами).

Більш детально розглянемо випадкові події, випадкові функції, а саме випадкову величину і випадковий процес, які на сьогодні є основними моделями досліджуваних сигналів під час їх вимірювання.

Випадкові події. Для опису випадкових подій використовується стохастичний експеримент проведення наступної послідовності дослідів, для яких має місце:

а) кожний дослід проводиться незалежно один від одного, за однакових умов, їх кількість можна збільшувати необмежено;

б) перед проведенням експерименту всі його наслідки (події) відомі, але невідомо який саме з них відбудеться у наступному досліді, тобто наслідки в експерименті з'являються випадково;

в) усім подіям, які можуть чи не можуть з'явитись в досліді притаманна певна об'єктивна характеристика, яку іменують частотою появи відповідної події у випадку проведення певного числа дослідів.

Стохастичний експеримент є вимірювальним експериментом, тому що кожній появі в експерименті конкретної події ставиться у відповідність одиниця натурального ряду чисел. Саме числові результати стохастичного експерименту

є основою практичної інтерпретації імовірності, яка використовується у подальшому у побудові ймовірнісної міри статистичних вимірювань.

Поставимо у відповідність стохастичному експерименту множину Ω – простір елементарних наслідків або елементарних подій. Елементами множини Ω є елементарні події $\omega \in \Omega$. В аналізі стохастичного експерименту розглядаються не тільки елементарні події, а й більш складні, як певні комбінації елементарних подій. Такі події іменують випадковими, їх прийнято позначати початковими великими буквами латинської абетки: A, B, C, \dots

Випадкова величина є функцією випадковий подій $\omega \in \Omega$, її позначають $\xi(\omega)$. Областю значень $\xi(\omega)$ є числова вісь $R = (-\infty, \infty)$.

Дискретна випадкова величина $\xi(\omega)$ має скінченну або нескінченну дискретну множину значень $\{x_i, i = \overline{1, n} \text{ або } n \rightarrow \infty\}$. Неперервна випадкова величина $\xi(\omega)$ набуває будь-яких значень з інтервалу $X \subseteq R$.

Для випадкових величин введені наступні не випадкові статистичні характеристики.

Функція розподілу ймовірності

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\},$$

визначає ймовірність тих $\omega \in \Omega$, для яких має місце $\xi(\omega) < x, x \in R$. Функція $F(x)$ є монотонно зростаючою в інтервалі $0 \leq F(x) \leq 1$, при цьому $F(-\infty) = 0$ та $F(\infty) = 1$.

Щільність розподілу ймовірності $p(x)$ або щільність ймовірності визначається як похідна від функції розподілу $p(x) = dF(x)/dx$.

Математичне сподівання

$$\mathbf{M}\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \text{ – для неперервної випадкової величини}$$

$$\mathbf{M}\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) - \text{для дискретної випадкової величини}$$

Математичне сподівання $\mathbf{M}\xi(\omega)$ є першим початковим моментом a_1 випадкової величини $\xi(\omega)$.

Дисперсія

$$\mathbf{D}\xi(\omega) = \mathbf{M}\left\{\left[\xi(\omega) - a_1\right]^2\right\}$$

є характеристикою розсіювання (розкиду) значень $\xi(\omega)$ відносно її середнього значення a_1 та є другим початковим моментом a_2 .

Випадкові процеси. Випадковим процесом $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ називається двовимірна випадкова функція, значення якої за будь-якого фіксованого аргумента часу t є випадковою величиною.

Напряга шуму на виході лінії зв'язку, температура повітря, струм через мікрофон під час розмови і т. ін., якщо проводити спостереження за миттєвими значеннями перелічених величин за часом, є прикладами реалізації випадкових процесів.

Результати окремих спостережень випадкового процесу іменуються його реалізаціями, кожна з них є детермінованою функцією і позначається $x(t)$. Сукупність можливих реалізацій $\{x_k(t), k = \overline{1, n}\}$ випадкового процесу називається ансамблем. Прикладом є ансамбль реалізацій, що спостерігається водночас на виходах різних каналів системи багатоканального зв'язку (рис. 1.3).

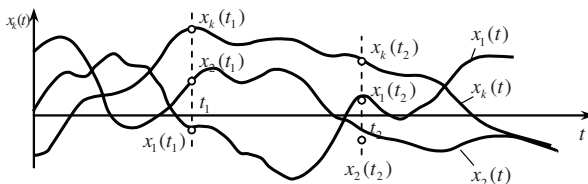


Рис. 1.3. Графіки ансамблю реалізацій випадкового процесу $\xi(\omega, t)$

Для виконання завдань вимірювань в основному використовуються стаціонарні випадкові процеси. Відмітимо, що стаціонарність випадкових процесів вводиться у широкому і вузькому сенсах. У більшості практичних вимірювань використовуються стаціонарні процеси у широкому сенсі або так звані слабостаціонарні. Аналіз цих процесів проводиться в рамках кореляційної (енергетичної) теорії. В такому разі визначаються два перші моментні функції процесу, а саме: середнє значення – перший початковий момент, дисперсія – другий центральний момент, кореляційна функція і спектральна щільність потужності. Такі характеристики процесу мають чітку фізичну інтерпретацію, що природно для завдань вимірювань.

Для аналізу стаціонарних процесів у вузькому сенсі необхідним є використання послідовності $n > 2$ вимірних функцій розподілу.

Більш детально зупинимось на аналізі слабостаціонарних процесів.

Випадковий процес $\xi(\omega, t)$ є слабостаціонарним, якщо задана його двовимірна функція розподілу у виді:

$$F(x_1, x_2; t, t + \tau) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega, t) < x_1 \text{ і } \xi(\omega, t + \tau) < x_2\} = F(x_1, x_2; \tau).$$

Відповідно для слабостаціонарного (далі просто стаціонарного) випадкового процесу $\xi(\omega, t)$ маємо:

- двовимірну щільність розподілу ймовірностей

$$p(x_1, x_2; \tau) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; \tau)}{\partial x_1 \partial x_2};$$

- маргінальну – одновимірну, функцію розподілу

$$F(x_1, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2; \tau) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2; 0) dx_2 = F(x), \quad x \in R;$$

- одновимірну щільність розподілу ймовірності $p(x) = dF(x)/dx$;

- математичне сподівання $M\xi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = a_1$;

- дисперсію $\mathbf{D}\xi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_1)^2 p(x) dx = \sigma^2$;

- автокореляційну функцію

$$\begin{aligned} R(\tau) &= M \{ [\xi(\omega, t) - a_1][\xi(\omega, t + \tau) - a_1] \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - a_1)(x_2 - a_1) p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2; \end{aligned}$$

- спектральну щільність потужності $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f \tau} R(\tau) d\tau$.

У відповідності з теоремою Вінера – Хінчина для парних функцій $R(\tau)$ і $G(f)$ маємо:

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} G(f) \cos 2\pi f \tau df; \quad G(f) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau.$$

Наведені вирази використовуються для аналізу енергетичних характеристик стаціонарних випадкових процесів.

Таким чином, для стаціонарного процесу $\xi(\omega, t)$ одновимірні функції $F(x)$ і $p(x)$, математичне сподівання a_1 і дисперсія σ^2 не залежать від часу; двовимірні функції $F(x_1, x_2; \tau)$ і $p(x_1, x_2; \tau)$ а також автокореляційна функція $R(\tau)$ залежать тільки від взаємного зсуву $\tau = t_2 - t_1$, $\tau \in R$. Спектральна щільність потужності $G(f)$ є одновимірною дійсною функцією частоти f .

Наведені характеристики стаціонарного випадкового процесу $\xi(\omega, t)$ використовуються у вимірюваннях характеристик шумових сигналів.

Коротко зупинимось на характеристиці, яка значною мірою визначає ефективність результатів вимірювань значень і характеристик випадкових сигналів.

Співвідношення сигнал/завада. В залежності від постановки завдань вимірювання одні сигнали відносять до інформаційних (корисних), а інші до

завад. В одних завданнях вимірювань це відношення є числом, а в інших – функцією, у загальному випадку функцією просторових координат і часу.

Якщо говорити про практику вимірювань, то варто відмітити наступне. Раніше (приблизно до середини ХХ століття) завдання вимірювань умовно вирішувались для відношень $c/z > 10$, пізніше – порядку 3. Сучасні інформаційні вимірювальні технології дають можливість вирішувати завдання вимірювань для відношень c/z менше 1 з використанням спеціальних методів опрацювання даних вимірювань.

1.4. Характеристики шумових сигналів

Енергетичні характеристики. Основними енергетичними характеристиками дійсного сигналу $s(t)$ є його потужність та енергія. Якщо в якості сигналу $s(t)$ виступає напруга $u(t)$ чи струм $i(t)$, то *миттєва потужність*, що виділяється на опорі R , з знаходиться через квадрат миттєвого значення:

$$p(t) = u^2(t)R = i^2(t) \Big/ R .$$

У теорії сигналів, як правило, приймають для розрахунків $R = 1$ Ом (крім деяких випадків), і тоді в загальному вигляді:

$$p(t) = s^2(t) /$$

Прийняття такої умови пов'язано з тим, що в багатьох задачах теорії сигналів використовують у розрахунках не конкретні значення потужності, а відношення потужності сигналу до потужності завади.

Енергія сигналу на інтервалі (t_1, t_2) визначається як інтеграл його миттєвої потужності:

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt .$$

Енергію сигналу можна обчислити також і за його спектральною щільністю потужності за формулою Релея:

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} S^2(f) df. \quad (1.3)$$

Квадрат модуля $|S(\omega)|^2$ називають *спектральною щільністю потужності*, або *енергетичним спектром* сигналу. З формули (1.3) випливає, що

$$S(f) = \sqrt{2}S(\omega),$$

оскільки $S(\omega)$ – двостороння спектральна щільність потужності ($-\infty \leq \omega \leq \infty$), а $S(f)$ – одностороння ($0 \leq f \leq \infty$).

Розрахунки середньої потужності за спектром. Середня потужність періодичного сигналу, яка розраховується на всій осі часу ($-\infty < t < \infty$), збігається з середньою потужністю за період. Для випадкових сигналів (завад) середню потужність можна розрахувати за спектральною щільністю потужності $G_x(f)$ чи $G_x(\omega)$.

Оскільки функції $G_x(f)$ та $G_x(\omega)$ показують розподіл потужності за частотами, то середня потужність

$$P_x = \int_0^{\infty} G_x(f) df = 2 \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega. \quad (1.4)$$

У виразі (1.4) $G_x(f) = 2G_x(\omega)$. Ця умова прийнята тому, що $G_x(\omega)$ – двостороння спектральна щільність потужності ($-\infty < \omega < \infty$), а $G_x(f)$ – одностороння ($0 \leq f \leq \infty$).

Динамічний діапазон і коефіцієнт амплітуди. Динамічний діапазон D_s сигналу $s(t)$ характеризує межі зміни миттєвої потужності і визначається виразом:

$$D_s = 10 \lg \left(\frac{P_{\max}}{P_{\min}} \right),$$

де p_{\max} – максимальне, а p_{\min} – мінімальне значення миттєвої потужності, які визначені будь-яким способом. Наприклад, мінімальна потужність, якщо її важко знайти, дорівнює потужності завади чи середньої квадратичної похибки.

Коефіцієнтом амплітуди сигналу K_A називається відношення його максимальної потужності до середньої. У логарифмічних одиницях маємо:

$$K_A^2 = 10 \lg \left(\frac{P_{\max}}{P_x} \right).$$

У деяких випадках динамічний діапазон і коефіцієнт амплітуди визначаються не в логарифмічних, а в абсолютних одиницях ("в разях").

Тривалість і ширина спектра сигналу (завади). Під тривалістю сигналу розуміють інтервал часу його існування. Обчислюється як різниця між часом закінчення сигналу t_k і часом його початку t_n : $T_s = t_k - t_n$.

Ширина спектра – це інтервал частот, який займає спектр. Обчислюється як різниця між максимальною f_{\max} і мінімальною f_{\min} частотами спектра: $F_s = f_{\max} - f_{\min}$. Розрахунки тривалості і ширини спектра сигналу (завади) не завдають труднощів, якщо вони мають чітко визначені початок та кінець, а спектр – граничні частоти. Але з перетворення Фур'є випливає, що коли сигнал має скінченну тривалість, то його спектр – нескінченний. І навпаки. Тому необхідно домовитись про визначення тривалості та ширини. На практиці використовуються різні визначення T_s та F_s , вибір яких залежить від призначення сигналу, його форми та структури. Застосовують такі методи визначення T_s та F_s :

1. Відлік на заданому значенні від максимального. Зазвичай тривалість імпульсного сигналу і ширину його спектра визначають на рівні $\frac{1}{\sqrt{2}}$ від максимального значення відповідно $s(t)$ чи $S(f)$. Але можна вибрати для розрахунків будь-яке інше значення, наприклад, 5% від максимального, як це показано на рис. 1.4 (а). У цьому є певна невизначеність методу.

2. *Заміна реального сигналу (спектру) рівновеликим прямокутним.* Така процедура частіше за інші застосовується для обчислення спектральної щільності потужності і наведена на рис. 1.4 (б), де зображено спектральну щільність завади $G_3(f)$. Площі прямокутника і фігури, що обмежена кривою $G_3(f)$ і осями координат, рівновеликі.

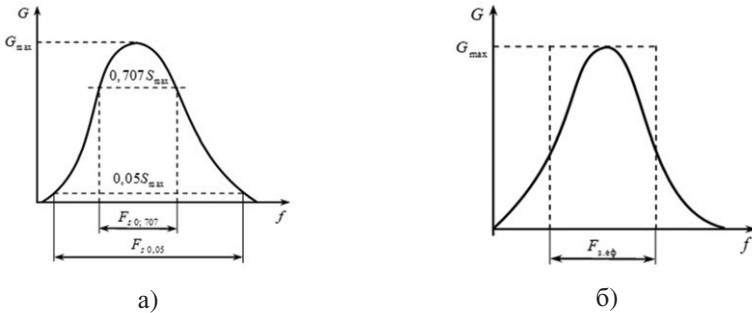


Рис. 1.4. Графічне зображення методів визначення ширини спектра

Числові характеристики сигналів і завад широко використовуються в телекомунікаційних системах. За енергетичними характеристиками визначається необхідне відношення сигнал/завада, за шириною спектра сигналу встановлюється смуга пропускання каналу зв'язку, що необхідна для неспотвореного передавання.

1.5. Приклади типових шумових сигналів

Питання аналізу реальних фізичних шумових сигналів тісно пов'язані з теорією задання випадкових функцій, які розглядаються у чисто теоретичному плані. Природно, що ніяка математична модель не може абсолютно точно відобразити фізичні процеси, які відбуваються при шумоутворенні в реальних фізичних умовах, тому вона повинна розглядатися як деяке більш менш вдале наближення, яке відображає тільки основні сторони реальних фізичних явищ. З цієї точки зору слідусе, що математичні моделі шумових сигналів повинні бути

достатньо простими і в той же час достатньо тонкими і різними, щоб як можна більш повно відобразити усі суттєві сторони реальних шумових сигналів.

Виходячи з загально прийнятих фізичних описів шумів можна зробити висновки, що теплові, напівпровідникові, дробовий та ревербераційний шуми, флікер-шуми та шуми торошення льоду, а також й інші шумові процеси можуть бути описані за допомогою математичної моделі лінійних випадкових процесів.

При розгляданні реальних фізичних моделей шумів зазвичай припускають, що спостережуваний випадковий шумовий процес є результатом дії великої кількості окремих імпульсів, кожен з яких має деяку тривалість, характеризується деяким ймовірнісним законом появи у часі та має деяку енергію, величина якої носить випадковий характер.

У залежності від конкретного виду перерахованих вище характеристик окремих імпульсів отримують різні шумові процеси. При цьому зазвичай припускають, що середовище, в якому виникає реальний фізичний шум має необхідні лінійні властивості.

Якщо коротко зупинитися на аналізі шумів, які найбільш часто зустрічаються, з метою встановлення застосовності для їх опису математичної моделі лінійних випадкових процесів, то треба привести моделі теплових шумів.

Для випадку теплового шуму існує багато різних моделей, найбільш часто зустрічаються дві з них:

- модель, яка виходить з загальних принципів статистичної механіки;
- модель, яка використовує теорему про рівномірний розподіл енергії.

Згідно з теоремою Найквіста спектральна щільність шумової електрорушійної сили у малому частотному інтервалі df визначається виразом

$$S(f)df = 4kTRp(|f|)df, \quad (1.4)$$

де f – частота, Гц; $S(f)$ – спектральна щільність теплового шуму; k – постійна Больцмана ($1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$); T – абсолютна температура, °K; R – опір, Ом; $p(f)$

– фактор Планка:

$$p(f) = \frac{hf}{kT} \left[\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1 \right]^{-1},$$

де $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ дж×сек - постійна Планка.

При нормальній кімнатній температурі у діапазоні частот, які використовуються у радіотехніці вираз (1.4) спрощується наступним чином:

$$S(f)df \approx 4kTRdf. \quad (1.5)$$

Якщо, виходячи з наближеної формули (1.5), припустити, що тепловий шум містить у полосі частот $(-\infty, \infty)$ постійну спектральну щільність, то він представляє собою похідну від вінерівського процесу:

$$\xi(\omega, t) = \sigma \frac{dv(t)}{dt},$$

де $\sigma^2 = 4kTR$, а $v(t)$ - вінерівський процес. Так як $\xi(\omega, t)$ є узагальненим випадковим процесом, то під гаусовим процесом мають на увазі той факт, що процес $\frac{\sigma}{\Delta t} [v(t + \Delta t) - v(t)]$ для $\Delta t > 0$, який зі зменшенням Δt наближується до узагальненої похідної процесу $\sigma v(t)$ і має щільність розподілу

$$p_{\Delta t}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi/\Delta t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2/\Delta t}\right), \quad t > 0.$$

Спектральна щільність такого шуму існує та визначається наступним виразом:

$$S_{\Delta t}(f) = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} e^{-j2\pi ft} \frac{\sigma^2}{\Delta t^2} (\Delta t - t) dt = \frac{1 - \cos 2\pi f \Delta t}{2\pi^2 f^2 \Delta t^2} \sigma^2.$$

Флікер-шум у напівпровідниках характеризується своєрідною спектральною щільністю

$$S(f) = c^2 (2\pi f)^{-a}, \quad f \in (0, \infty), \quad (1.6)$$

де $a = 1 + \varepsilon$, ε – деяка постійна величина ($0 < \varepsilon \ll 1$), c – деяка постійна.

Напівпровідниковий фліккер-шум можна представити у вигляді

$$\tilde{\zeta}(\omega, t) = \int_0^{\infty} e(t - \tau) d\pi_1(\tau).$$

Кореляційна функція процесу (1.6) має наступний вигляд:

$$R(\tau) = \overline{\lambda \alpha_N^2} \int_0^{\infty} e(\tau) e(\tau + s) d\tau,$$

де $\overline{\alpha_N^2} = \int_0^{\infty} x^2 dF(x)$, $F(x)$ – функція розподілу зарядів групи носіїв, а $e(\tau)$

задовольняє умові фізичної реалізованості.

Якщо виходити зі спектральної щільності, визначеної виразом (1.6), то середня інтенсивність імпульсів носіїв дорівнює нескінченності. Це не узгоджується з фізикою явища. Виходячи з того, що область визначення не включає в себе точку $f=0$ в деякому околі δ , можна отримати ще одну апроксимацію спектральної щільності фліккер-шуму у напівпровідниках:

$$S(f) = c^2 \left(\delta^2 + (2\pi f)^2 \right)^{-a/2}, f \in [0, \infty),$$

яка при малих, відповідно обраних значеннях δ з наперед заданим ступенем точності на будь-якому кінцевому інтервалі $f \in (0, \infty)$ може апроксимувати значення спектральної щільності.

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ШУМОВИХ СИГНАЛІВ

2.1. Основи математичного моделювання шумових сигналів

Шумові сигнали зазвичай розглядаються як сума великої кількості незалежних імпульсів з випадковими параметрами [20, 24, 44, 46, 48]. Більшість задач ймовірнісного аналізу та статистичної обробки шумових сигналів базується на гауссовій моделі досліджуваних випадкових процесів.

Застосування гауссової моделі зазвичай обґрунтовується центральною граничною теоремою та дає можливість застосовувати на практиці результати теорії випадкових процесів та математичної статистики, які засновані на припущенні про гауссовий розподіл досліджуваних процесів. Проте необхідно відмітити, що центральна гранична теорема справедлива лише при виконанні умов Ліндеберга [48], які в прикладних задачах, як правило, не перевіряються.

Відповідно до сучасної теорії сумування випадкових величин клас граничних законів для сум незалежних випадкових величин співпадає з класом безмежно подільних законів розподілу, які включають як частинний випадок й гауссовий розподіл.

Функція розподілу $F(x)$ та відповідна характеристична функція $f(u)$ називаються безмежно подільними, якщо для будь-якого цілого додатнього числа n існує така характеристична функція $f_n(u)$, що

$$f(u) = [f_n(u)]^n. \quad (2.1)$$

Функція $f_n(u)$ у формулі (2.1) визначається функцією $f(u)$ так:

$$f_n(u) = [f(u)]^{\frac{1}{n}}$$

при цьому обирається головна гілка корня n -го степеня.

Клас безмежно подільних випадкових величин визначається наступним чином.

Випадкова величина $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається безмежно подільною, якщо для будь-якого натурального числа n ця випадкова величина може бути представлена у вигляді суми незалежних випадкових величин $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ з одною функцією розподілу $F_n(x)$, яка залежить від кількості доданків n . Безмежно подільна функція розподілу $F(x)$ є n -кратною згорткою функцій розподілу $F_n(x)$.

Наведені визначення є еквівалентними та відносяться до розподілів у будь-якому скінченному просторі. До елементарних властивостей безмежно подільних характеристичних функцій відносять наступні.

1. Безмежно подільна характеристична функція не має нулів на дійсній вісі.
 2. Добуток будь-якої скінченної кількості безмежно подільних характеристичних функцій є безмежно подільним.

3. Характеристична функція, яка є границею послідовності безмежно подільних характеристичних функцій, також безмежно подільна.

4. Нехай $\{F_n(x)\}$ - послідовність функцій розподілу, а $\{f_n(u)\}$ - послідовність відповідних характеристичних функцій. Послідовність $\{F_n(x)\}$ слабо сходиться до функції розподілу $F(x)$ тоді і тільки тоді, коли $\{f_n(u)\}$ сходиться при кожному u до деякої неперервної в нулі функції $g(u)$. При цьому гранична функція $g(u)$ співпадає з характеристичною функцією $f(u)$ розподілу $F(x)$.

5. Характеристична функція є безмежно подільною тоді і тільки тоді, коли її можна представити у виді

$$f(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{p_n [g_n(u) - 1]\},$$

де p_n - додатні числа, а $g_n(u)$ - деякі характеристичні функції.

6. Границя послідовностей добутоків скінченної кількості характеристичних функцій пуасонівського типу є безмежно подільною.

7. Функція $f(u)$ є характеристичною функцією деякого безмежно подільного розподілу зі скінченною дисперсією тоді і тільки тоді, коли справедливе представлення

$$f(u) = \exp \left\{ ium + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - iux \right) \frac{dK(x)}{x^2} \right\}, \quad (2.2)$$

де m – дійсне число, а $K(x)$ – неспадна обмежена функція, для якої $K(-\infty) = 0$ (пуассонівська спектральна функція Колмогорова). Підінтегральна функція при $x = 0$ вважається рівною $-\frac{u^2}{2}$. Представлення (2.2) єдине, причому відповідність між $f(u)$ та парою $\{m, K(x)\}$ є взаємно однозначною.

8. Функція $f(u)$ є безмежно подільною тоді і тільки тоді, коли вона може бути представлена у вигляді

$$f(u) = \exp \left\{ iua - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{|x|>0} \left(e^{iux} - 1 - iux \right) dL(x) \right\}, \quad (2.3)$$

де a – дійсне число, $\sigma^2 \geq 0$, $L(x)$ – пуассонівська спектральна функція Леві.

Представлення (2.3) єдине, а відповідність між $f(u)$ та набором $\{a, \sigma^2, L(x)\}$ є взаємно однозначним.

9. Функція $f(u)$ є безмежно подільною характеристичною функцією тоді і тільки тоді, коли вона може бути представлена у вигляді

$$f(u) = \exp \left\{ iua + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right\}, \quad (2.4)$$

де a – деяке дійсне число, $G(x)$ – неспадна обмежена функція, для якої $G(-\infty) = 0$ (пуассонівська спектральна функція Леві-Хінчіна). Підінтегральна функція при $x = 0$ вважається рівною $-\frac{u^2}{2}$. Представлення (2.4) єдине, причому відповідність між $f(u)$ та парою $\{a, G(x)\}$ є взаємно однозначною.

Для безмежно подільних розподілів точне знаходження функції розподілу (щільності ймовірностей) є в загальному випадку неможливою задачею. В явному вигляді ці функції розподілу записуються для обмеженої кількості розподілів, наприклад, гауссового, Коші, гамма, Пуассона та від'ємного біноміального. У зв'язку з цим задачу дослідження законів розподілу безмежно подільних випадкових величин доцільно розв'язувати, використовуючи параметри канонічного представлення їх характеристичних функцій.

2.2. Загальна модель шумового сигналу

Шумові сигнали інтегрально відображають флуктуаційні процеси різних фізичних явищ – термодинамічних, електромагнітних, гідродинамічних, механічних, оптичних, та інших. В електронних і радіоелектронних засобах і системах добре відомі шумові сигнали дробового, теплового і фліккер-шумів. Це також вібраційні і віброакустичні шуми технічних систем і механізмів, трибомеханічні шуми, сигнали акустичної емісії, аеродинамічні і гідродинамічні шуми в потоках газів і рідин, та інші.

Базуючись на фізичних механізмах формування шумових сигналів у різних технічних об'єктах і системах енергетики, машинобудування, транспорту, авіації та інших, авторами запропоновано наступну узагальнену математичну модель шумового сигналу у виді трикомпонентного векторного випадкового процесу

$$\begin{aligned} \Xi_3(\omega, t) &= ({}_1\xi(\omega_1, t), {}_2\xi(\omega_2, t), A(t/\xi(\omega_0, t_0))), \\ \omega &= (\omega_0, \omega_1, \omega_2), \omega_0 \in \Omega_0, \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \dots \\ \Omega &= (\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2), t \in T \end{aligned} \quad (2.5)$$

Область визначення $\Xi_3(\omega, t) \Rightarrow \Omega \times T$, а область значення – множина дійсних чисел $\Xi_3(\omega, t) \in R(-\infty, \infty)$. У загальному випадку характеристики моделі $\Xi_3(\omega, t)$ визначаються, як у рамках кореляційної (енергетичної) теорії, так і з урахуванням вищих моментів.

Компонентами такої моделі є наступні:

1) компонента ${}_1\xi(\omega_1, t)$ - нестационарний випадковий процес, який описує механізм формування шумового сигналу дією значної кількості елементарних імпульсних сигналів різної інтенсивності;

2) компонента ${}_2\xi(\omega_2, t)$ - нестационарний випадковий процес, сформований дією значної кількості елементарних гармонічних коливань (хвиль);

3) компонента $A(t/\xi(\omega_0, t_0))$ - трендова детермінована компонента $A(t)$ з початковими випадковими умовами $\xi(\omega_0, t_0)$, яка описує зміни об'єкту дослідження при ремонті, модернізації, тощо.

Відомо, що для опису моделі (2.5) – трикомпонентного векторного процесу $\Xi_3(\omega, t)$ використовується послідовність скінченновимірних функцій розподілу, а саме

$$\begin{aligned} F_{\Xi}(x, t) &= P\{\omega \in \Omega : \Xi_3(\omega, t)\}, \quad x \in R, \\ F_{\Xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= P\{\omega \in \Omega : \Xi_3(\omega, t_1) < x_1, \Xi_3(\omega, t_2) < x_2\}, \\ &\vdots \\ F_{\Xi}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= P\{\omega \in \Omega : \Xi_3(\omega, t_1) < x_1, \dots, \Xi_3(\omega, t_n) < x_n\}. \end{aligned}$$

У рамках кореляційної (енергетичної) теорії для дослідження моделі (2.5) достатньо задати $F_{\Xi}(x, t)$ та $F_{\Xi}(x_1, x_2; t_1, t_2)$. При відомих вказаних функціях моделі визначаються відповідні щільності розподілу ймовірностей

$$p_{\Xi}(x, t) = \frac{\partial F_{\Xi}(x, t)}{\partial x}, \quad p_{\Xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial F_{\Xi}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

а також характеристичні функції

$$\begin{aligned} f_{\Xi}(u, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} p_{\Xi}(x, t) dx, \\ f_{\Xi}(u_1, u_2; t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u_1 x_1 + u_2 x_2)} p_{\Xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Числові характеристики загальної моделі (2.5) визначаються за формулами:

- математичне сподівання

$$a_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{\Xi}(x, t)dx;$$

- автоковаріаційна функція

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{\Xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2;$$

- автокореляційна функція

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a_1(t_1)][x_2 - a_1(t_2)] p_{\Xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2;$$

- дисперсія

$$R(t_1, t_1) = \sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a_1(t)]^2 p_{\Xi}(x, t) dx.$$

Наведені вище характеристики узагальненої моделі шумового сигналу виду (2.5) є відомими з теорії випадкових процесів і по суті враховують всі частинні випадки конкретних моделей досліджуваних шумових сигналів, які адаптовані і відображають характерні особливості кожного досліджуваного об'єкта або системи. На далі немає сенсу продовжувати аналіз моделі (2.5), а доцільно перейти до більш конкретних моделей шумових сигналів.

Конструктивна модель шумового сигналу для комп'ютерного та математичного моделювання. Конструктивний метод створення моделей шумових сигналів на основі використання випадкового процесу типу білого шуму відомий в різних прикладних задачах аналізу сигналів як метод:

- формуючого лінійного фільтра;
- породжуючого процесу;
- оновлюваного процесу;
- стохастичних інтегральних зображень.

Аналізуючи використання вказаних методів при створенні моделей шумових сигналів, можна зробити висновок, що метод стохастичних інтегральних зображень по суті узагальнив результати вказаних інших методів і обґрунтував клас лінійних випадкових процесів.

Зазвичай при моделюванні лінійних випадкових послідовностей як шумових сигналів приділяють увагу тільки стаціонарному випадку. В той же час, на практиці майже всі реальні шумові сигнали є нестаціонарними, тому використання в якості моделі таких послідовностей є недоцільним. Для того, щоб описати всі можливі варіанти формування шумових сигналів, було розроблено конструктивну модель шумового сигналу, яку можна використовувати для математичного та комп'ютерного моделювання в якості трикомпонентного векторного випадкового процесу виду:

$$\Xi_3(\omega, t) = ({}_1\xi(\omega_1, t), {}_2\xi(\omega_2, t), A(t)), \omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2), t \in T, \quad (2.6)$$

але з більш конкретним, на відміну від процесу (2.5) змістом його складових.

В якості компонент випадкового процесу виду (2.6) використовуються наступні:

$$1) \text{ компонента } {}_1\xi(\omega_1, t) = \sum_{i=1}^n {}_1\xi_i(\omega_1, t)I(t, \Delta T_i) \text{ де } \{ {}_1\xi_i(\omega_1, t), i = \overline{1, n} \} -$$

послідовність стаціонарних лінійних випадкових процесів;

$$2) \text{ компонента } {}_2\xi(\omega_2, t) = \sum_{j=1}^n {}_2\xi_j(\omega_2, t)I(t, \Delta T_j) \text{ де } \{ {}_2\xi_j(\omega_2, t), j = \overline{1, m} \} -$$

послідовність гармонізованих процесів;

$$3) \text{ компонента } A(t) = \sum_{l=1}^k A_l(t)I(t, \Delta T) \text{ де } \{ A_l(t), l = \overline{1, k} \} - \text{апроксимуючі}$$

функції при реалізації випадкової величини $\xi(\omega_0, t_0)$

4) індикаторна функція задається виразом:

$$I(t, \Delta T_j) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta T_j \\ 0, & t \notin \Delta T_j. \end{cases}$$

і на практиці формується миттєвими часовими моментами розладу однорідності (стаціонарності) досліджуваних компонент. Іншими словами - інтервалами однорідності $[0, \Delta T_1) \cup [\Delta T_1, \Delta T_2) \cup \dots \cup [\Delta T_{n-1}, \Delta T_n] = [0, T]$ досліджуваних компонент.

2.3. Модель шумового сигналу у часовій області – лінійний випадковий процес

Використання гауссових лінійних випадкових процесів в якості однієї з компонент шумового сигналу пов'язано з наступними обставинами [33, 35 – 36, 50]:

- гауссові випадкові процеси однозначно задаються матрицею кореляційних моментів, тому моделювання їх в рамках кореляційної теорії рівносильно моделюванню по заданих багатовимірних розподілах;

- моделювання випадкових негауссових процесів зводиться до моделювання гауссових випадкових процесів з подальшим відтворенням заданого перетворення, для чого достатньо забезпечити лише необхідні кореляційні зв'язки вихідних (гауссових) процесів;

- багатовимірні закони розподілу негауссових випадкових процесів важко отримати теоретично і експериментально. Їх кореляційні моменти зазвичай визначаються значно простіше.

Перейдемо безпосередньо до дослідження лінійного випадкового процесу.

Неперервний процес. Лінійним випадковим процесом називається процес виду

$$\xi(\omega, t) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\omega, \tau), \quad (2.7)$$

де $\varphi(\tau, t)$ – не випадкова функція двох аргументів, фізична інтерпретація якої є імпульсна перехідна функція лінійного фільтра у загальному випадку з

залежними від часу параметрами, а випадковий процес $\eta(\omega, \tau)$ є процесом з незалежними (некорельованими) приростами. Детерміновану функцію $\varphi(\tau, t)$ називають ядром інтегрального зображення (2.7), а процес $\eta(\omega, \tau)$ - породжуючим.

Як правило, при використанні лінійних випадкових процесів вимагається, щоб процес $\xi(\omega, t)$ був гільбертовим, тобто, щоб $\mathbf{M}\{\xi(\omega, t)\}^2 < \infty, \forall t \in T$. Для цього необхідно, щоб дисперсія приростів процесу $\eta(\omega, \tau)$ була скінченною, а для ядра $\varphi(\tau, t)$ виконувалась умова $\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\tau, t)]^2 d\tau < \infty, \forall t \in T$.

Клас лінійних випадкових процесів є замкненим відносно лінійних перетворень, які в даному випадку зводяться до відповідних лінійних перетворень їх не випадкових ядер $\varphi(\tau, t)$.

Математичне сподівання, дисперсія та кореляційна функція гільбертового лінійного випадкового процесу мають вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\xi(\omega, t)\} &= m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\tau, \\ \mathbf{D}\{\xi(\omega, t)\} &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau, t) d\tau, \\ R(t_1, t_2) &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_1) \varphi(\tau, t_2) d\tau, \quad t_1, t_2 \in T. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для того, щоб лінійний випадковий процес був стаціонарним, необхідно і достатньо, щоб його ядро залежало лише від різниці аргументів, тобто

$$\varphi(\tau, t) = \varphi(t - \tau) = \varphi(s), \quad s = t - \tau$$

при цьому зображення (2.7) набуває вигляду

$$\xi(\omega, t) = \int_0^{\infty} \varphi(t - \tau) d\eta(\omega, \tau). \quad (2.9)$$

Для стаціонарного лінійного випадкового процесу (2.9) вирази (2.8) мають наступний вигляд:

$$\mathbf{M}\{\xi(\omega, t)\} = m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) ds = const,$$

$$\mathbf{D}\{\xi(\omega, t)\} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(s) ds = const,$$

$$R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1) = R(t) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \varphi(s + \tau) ds, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Похідна процесу $\eta'(\omega, \tau) = \zeta(\omega, \tau)$ є процесом білого шуму. Тому наступний вираз

$$\xi(\omega, t) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau, t) \zeta(\omega, \tau) d\tau \quad (2.10)$$

більш чітко розкриває фізичну інтерпретацію методу стохастичних інтегральних зображень випадкових процесів як лінійну фільтрацію процесу типу білого шуму $\zeta(\omega, \tau)$.

Дискретний процес. Лінійна випадкова послідовність як частинний випадок неперервного лінійного випадкового процесу (2.7) описується виразом

$$\xi(\omega, kh) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(nh, kh) \zeta(\omega, nh), \quad (2.11)$$

де $\zeta(\omega, nh)$ – породжуючий стаціонарний білий шум з дискретним часом з параметрами $\mathbf{M}\{\zeta(\omega, \tau)\} = m$; $\mathbf{D}\{\zeta(\omega, \tau)\} = \sigma^2$, а $\varphi(nh, kh)$ – двовимірна імпульсна перехідна функція формуючого лінійного дискретного фільтра зі змінними в часі параметрами.

Лінійна випадкова послідовність (2.11) є стаціонарною, якщо $\varphi(nh, kh) \equiv \varphi((k - n)h)$, тобто існує формуючий дискретний фільтр з постійними в часі параметрами і відповідно можна отримати

$$\xi(\omega, kh) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi((k - n)h) \zeta(\omega, nh) \quad (2.12)$$

з наступними характеристиками

$$\mathbf{M}\{\xi(\omega, kh)\} = m \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(nh) = \text{const};$$

$$\mathbf{D}\{\xi(\omega, kh)\} = \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^2(nh) = \text{const};$$

$$R(nh, kh) = R(nh, (n+m)h) \equiv R(mh) = \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi((n+m)h)\varphi(nh).$$

Лінійні випадкові послідовності як компоненти моделі шумових сигналів можуть бути використані в наступних прикладних задачах:

- в якості моделей типових завод в радіоелектронних, радіофізичних, гідроакустичних системах, таких як теплові, дробові, віброакустичні, гідроакустичні шуми, RC- і RLC-шуми, фліккер-шуми [35].

- використання конструктивного зображення лінійного випадкового процесу по суті є алгоритмом формування реалізацій такого процесу, що дає можливість проводити обчислювальні експерименти розв'язання задач дії шумових сигналів в технічних системах.

- у класі нестационарних лінійних випадкових процесів найбільш досліджуваними є періодичні лінійні процеси, які можуть служити моделями шумових завод з періодичними характеристиками.

Шумові сигнали у вигляді лінійних випадкових процесів є найбільш досліджуваними у класі випадкових процесів, які знайшли широке використання при проведенні теоретичних і прикладних досліджень технічних систем [24, 35, 49 – 50].

2.4. Модель шумового сигналу у часовій області – гармонізовний випадковий процес

Загальною моделлю шумового сигналу є спектральне зображення випадкового процесу $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ у вигляді комплекснозначного гармонізованого випадкового процесу

$$\xi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} dZ(\omega, f), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in T \quad (2.13)$$

Випадковий процес (2.13) називається також гармонізовним процесом по Лосеву.

Інтегральне стохастичне зображення гармонізованого випадкового процесу (2.13) можна представити у виді відповідної межі (границі) у середньоквадратичному ймовірнісному сенсі (l.i.m) суми наступних компонент, кожна з яких описується виразом

$$e^{i2\pi f_j t} |\Delta_j z(\omega, f_j)| e^{i \arg \Delta_j z(\omega, f_j)} = |\Delta_j z(\omega, f_j)| e^{i[2\pi f_j t + \arg \Delta_j z(\omega, f_j)]},$$

тобто існує сума комплексних гармонічних коливань з випадковими функціями амплітуд і фаз аргументу f .

На основі кореляційної функції $F(f_1, f_2)$ комплекснозначної випадкової функції $Z(\omega, f)$, тобто

$$F(f_1, f_2) = \mathbf{M}\{Z(\omega, f_1)Z^*(\omega, f_2)\}$$

визначається кореляційна функція $R(t_1, t_2)$ гармонізованого процесу (2.13) у виді

$$R(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{\xi(\omega, t_1)\xi^*(\omega, t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(f_1 t_1 - f_2 t_2)} d_{f_1} d_{f_2} F(f_1, f_2)$$

де $\xi^*(\omega, t)$ – комплексно спряжений випадковий процес до процесу $\xi(\omega, t)$.

У класі гармонізованих випадкових процесів найбільш досліджуваними є наступні моделі.

Стаціонарні випадкові процеси. Дійсний стаціонарний гармонізований випадковий процес, як частинний випадок має наступний вид [24, 31, 36, 50]

$$\xi(\omega, t) = \int_0^{\infty} \cos(2\pi ft) d\eta_c(\omega, f) + \int_0^{\infty} \sin(2\pi ft) d\eta_s(\omega, f), \quad t \in R, \quad (2.14)$$

де відповідно випадкові функції $\eta_c(\omega, f)$ та $\eta_s(\omega, f)$ – є функціями з ортогональними приростами.

Якщо перейти до дискретного випадку, то необхідно пам'ятати, що стаціонарний випадковий процес $\xi(\omega, t)$ з дискретним часом задається на еквідістантній часовій ґратці

$$k\Delta t = kh \in \{0, h, 2h, \dots\}, \quad h > 0, \quad (2.15)$$

де h – крок часової ґратки, а сам процес у виді $\xi(\omega, kh)$, $k \in N$ іменується стаціонарною випадковою послідовністю.

З урахуванням виразів (2.14) і (2.15) дійсна стаціонарна випадкова послідовність має вид

$$\xi(\omega, kh) = \int_0^{1/2h} \cos(2\pi f kh) d\eta_c(\omega, f) + \int_0^{1/2h} \sin(2\pi f kh) d\eta_s(\omega, f), \quad (2.16)$$

де $\eta_c(\omega, f)$, $\eta_s(\omega, f)$, $f \in [0, 1/2h]$ – дійсні випадкові функції з ортогональними приростами.

Кореляційна функція стаціонарної послідовності (2.16) визначається виразом

$$R(kh) = \int_0^{1/2h} \cos(2\pi f kh) dG(f)$$

де спектральна функція $G(f)$ є неспадною, неперервною зліва функцією, для якої має місце

$$G(0) = 0; \quad G\left(\frac{1}{2\pi}\right) = D\{\xi(\omega, t)\} = R(0) = \sigma^2$$

Періодично корельований гармонізовний випадковий процес.

Гармонізовний випадковий процес $\{\xi(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in R\}$ виду (2.14) називається періодично з періодом $T_0 > 0$ корельованим, якщо його кореляційна функція задовольняє умові

$$M\{\xi(\omega, t_1)\xi^*(\omega, t_2)\} = R(t_1, t_2) = R(t_1 + T_0, t_2 + T_0). \quad (2.17)$$

Для характеристики кореляційного зв'язку значень періодично корельованого процесу $\xi(\omega, t)$ вводиться функція

$$B(t, \tau) = R(t + \tau, t)$$

для якої умова (2.17) приймає вид

$$B(t, \tau) = R(t + T_0, t)$$

Періодичну по аргументу t функцію $B(t, \tau)$ можна розкласти в ряд Фур'є

$$B(t, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(\tau) e^{i2\pi \frac{k}{T_0} t}$$

де коефіцієнти

$$B_k(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} B(t, \tau) e^{-i2\pi \frac{k}{T_0} t} dt$$

Аналіз структури періодично корельованого процесу $\xi(\omega, t)$ дав можливість обґрунтувати важливий для практичних задач результат розкладу процесу $\xi(\omega, t)$ на послідовність стаціонарних і стаціонарно зв'язаних компонент у виді [24, 40, 56]

$$\xi(\omega, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \zeta_k(\omega, t) e^{i2\pi \frac{k}{T_0} t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{k}{T_0} t} \int_{-1/2T_0}^{1/2T_0} e^{i2\pi f t} dZ_k(\omega, f)$$

Послідовність випадкових процесів $\{\zeta_k(\omega, t)\}$ як компонент розкладу періодично корельованого процесу $\xi(\omega, t)$ є стаціонарними і стаціонарно зв'язаними процесами.

Таким чином, загальною математичною моделлю шумових сигналів з гармонічними компонентами є нестационарний гармонізований випадковий процес виду (2.13). Найбільш важливою властивістю структури періодично корельованого процесу є те, що така модель дає можливість використати потужний апарат досліджень стаціонарних процесів для дослідження нестационарних сигналів з різними фізичними механізмами формування гармонічних коливань.

РОЗДІЛ 3. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ШУМОВИХ СИГНАЛІВ

3.1. Особливості комп'ютерного моделювання шумових сигналів

Однією з актуальних задач дослідження перетворень інформаційних сигналів в технічних системах є моделюючий експеримент з використанням шумових сигналів. Як правило, в якості первинного випадкового процесу для моделювання досліджуваного шумового сигналу, використовується процес типу «білого шуму» з рівномірним або нормальним законами розподілу [32, 45]. У подальшому для формування заданого шумового сигналу проводять відповідні різні лінійні та нелінійні перетворення такого випадкового процесу [21]. Зазвичай для виконання таких перетворень використовують різні способи отримання реалізацій білого шуму, але частіше за все виокремлюють програмний метод генерування псевдовипадкової послідовності [58, 66], аналізу якого і буде присвячено даний розділ.

Генератори псевдовипадкових послідовностей чисел широко використовуються для вирішення різнопланових науково-технічних задач, наприклад, для моделювання випадкових шумових сигналів або аналізу функціонування складних систем в умовах впливу завад [21, 45, 58, 60, 66]. В таких задачах мають місце варіанти, коли не вказані обмеження на статистичні характеристики псевдовипадкових послідовностей, або з варіантами, коли треба сформулювати послідовності з наперед заданими характеристиками та законом розподілу. В останньому випадку виникає проблема статистичної об'єктивної кількісної оцінки ступеню відповідності генераторів псевдовипадкових чисел заданому закону розподілу шумового сигналу.

На сьогодні розроблено значну кількість інструментальних засобів, які дозволяють проводити попередній аналіз придатності послідовностей, сформованих генераторами псевдовипадкових чисел. Програмне забезпечення

та опис тестів, які реалізуються даними пакетами прикладних програм є загальнодоступним [59, 63, 65, 67 – 68]. Описи таких тестів містять комплексні програми випробувань генераторів псевдовипадкових чисел та процедури обчислення загального показника якості, який враховує результати від усіх тестів, які входять в даний програмний пакет. В той же час розробники алгоритмів формування псевдовипадкових чисел пропонують свої засоби дослідження, які підтверджують якість створеного програмного продукту та не завжди використовують комплекти тестів, рекомендовані NIST (National Institute of Standards and Technology) або іншими авторитетними організаціями [1, 22, 25, 51]. Але всі вказані засоби засновані виключно на оцінці тестів, які тільки підтверджують гіпотезу про випадковість послідовностей чисел.

Аналіз публікацій по перевірці генераторів псевдовипадкових чисел дає можливість обґрунтувати актуальність розробки рекомендацій по вибору генераторів псевдовипадкових чисел при моделюванні шумових сигналів. Так, у [1, 21, 53] наведена значна кількість критеріїв узгодження випадкового сигналу та його комп'ютерної моделі – реалізації на основі білого шуму. Проте відсутня інформація про прийняття рішення, який саме генератор псевдовипадкової послідовності чисел потрібно використовувати і для якого випадку. У [32, 51] описано аналіз ряду характеристик реалізацій білого шуму, за допомогою яких можна зробити висновок про доцільність використання того чи іншого генератора псевдовипадкових чисел. Крім того, в даних роботах наведено оцінку метрологічних характеристик реалізацій білого шуму, але не описано єдину методику знаходження такого генератора псевдовипадкових чисел, який би однозначно давав відповідь на питання – який з генераторів псевдовипадкової послідовності чисел найбільше підходить за характеристиками якості для отримання заданих реалізацій білого шуму?

На основі аналізу результатів відомих публікацій, обґрунтовано рекомендації по вибору генератора псевдовипадкових чисел, розподілених за рівномірним законом, у якого ступінь відповідності реалізацій рівномірному

закону буде більш статистично вагомою за характеристиками якості. Вибір генератора рекомендовано проводити за схемою, показаною на рис. 3.1.



Рис. 3.1. Структурно-логічна схема для оцінки реалізацій білого шуму

В якості критеріїв для перевірки гіпотез про рівномірність досліджуваної реалізації використовувалися критерій Колмогорова-Смірнова та χ^2 -критерій.

Як видно з рис. 3.1, перед розрахунком характеристик якості генераторів, необхідно було провести деякі графічні тести, під час яких було побудовано автокореляційну функцію та гістограму отриманої реалізації. Так званий «кореляційний шум» [51] отримується з нормованої автокореляційної функції шляхом вилучення з нею одиниці при відсутності шуму. Приклад отримання кореляційного шуму для генератора псевдовипадкових чисел з рівномірним законом розподілу показано на рис. 3.2.

Так як теоретичні значення математичного сподівання та дисперсії для рівномірного закону розподілу загальновідомі, то знаходження відносної похибки отриманого середнього та середньоквадратичного відхилення (СКВ) реалізацій білого шуму є досить простим.

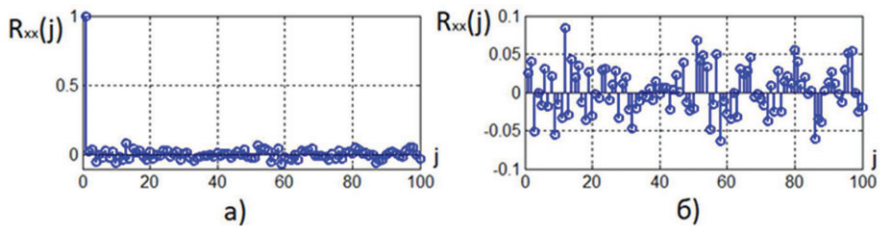


Рис. 3.2. Графік статистичної оцінки автокореляційної функції
(а) білого шуму та відповідного їй кореляційного шуму (б)

Для розрахунку характеристик якості генераторів білого шуму за графічними тестами необхідно було знайти:

- кількість значень автокореляційної функції, які перевищували заданий допустимий поріг (поріг обирається за результатами багаторазового статистичного моделювання);
- максимальне значення кореляційного шуму;
- максимальне відхилення значень гістограми від одиниці.

На основі характеристик, описаних вище, приймається рішення про вибір генератора псевдовипадкової послідовності чисел. Для цього використовується метод Парето для вирішення багатокритеріальних задач, за результатами якого відкидаються свідомо неприродні або невігідні рішення, зберігаються тільки ті рішення, для яких не існує домінуючих у багатокритеріальній задачі [9].

3.2. Дослідження генераторів псевдовипадкових чисел для моделювання шумових сигналів

Для комп'ютерного моделювання шумових сигналів зазвичай використовують генератори псевдовипадкових чисел з рівномірним законом розподілу, вибірка якого пізніше трансформується у вибірку з необхідним користувачу законом розподілу. Нижче будуть представлені рекомендації по вибору генераторів псевдовипадкових чисел з різними об'ємами вибірки.

Загальна методика модельного дослідження. В якості генераторів псевдовипадкової послідовності чисел були використані наступні:

- метод Мартіна, де наступне число з послідовності обирається за формулою

$$X_{n+1} =]c \times X_n [,$$

де $]c [$ означають операцію взяття дробової частини числового добутку, що міститься між цими дужками;

- конгруентний метод, де наступне число з послідовності обирається за формулою

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$$

при чому в якості значень a, c, m використовувалися різні значення, які наведені у [21];

- вбудований у середовищі Matlab генератор з рівномірним законом розподілу (функція `unifrnd`).

Для дослідження реалізацій шумового сигналу використовувалися вибірки об'ємом від 100 до 1000 елементів.

Для методу Мартіна для генерування послідовностей були проведені дослідження для різних значень c та X_1 : в якості вибірки № 1 взято вибірку зі значеннями $c = 7875, X_1 = 0,1663$; в якості вибірки № 2 - $c = 6075, X_1 = 0,1283$; а в якості вибірки № 3 - $c = 714025, X_1 = 0,150889$.

Для конгруентного методу генерування послідовностей були проведені дослідження для різних значень a, c, m : В якості вибірки № 1 взято вибірку зі значеннями $m = 7875, c = 1663, a = 211$; в якості вибірки № 2 - $m = 6075, c = 1366, a = 1283$; а в якості вибірки № 3 - $m = 714025, c = 4096, a = 150889$.

На основі використання критеріїв Колмогорова-Смірнова та χ^2 -критерію підтверджена гіпотеза про рівномірність розподілу значень досліджуваних реалізацій як для методу Мартіна, так і для конгруентного методу та вбудованого генератора.

Результати досліджень для вибірки 100 елементів. Результати оцінок якості досліджуваних реалізацій для вибірки об'ємом 100 елементів наведено в табл. 3.1.

У табл. 3.1 (та далі у табл. 3.2 та табл. 3.3) оцінки якості генераторів позначені так:

- MX1 - відносна похибка математичного сподівання, %;
- MX2 - відносна похибка дисперсії, %;
- MX3 - кількість значень автокореляційної функції, які перевищили заданий допустимий поріг;
- MX4 - максимальне значення кореляційного шуму;
- MX5 - максимальне відхилення значень гістограми відносно 1.

Таблиця 3.1

Результати оцінок якості генераторів псевдовипадкових чисел для вибірки об'ємом 100 елементів

Метод генерування послідовностей	№ вибірки	MX1	MX2	MX3	MX4	MX5
Метод Мартіна	1	0,167	11,525	4	0,157	0,733
	2	1,099	17,901	4	0,261	0,733
	3	8,046	12,493	2	0,222	0,857
Конгруентний метод	1	0,629	12,907	1	0,150	0,571
	2	5,037	7,857	3	0,181	0,615
	3	2,415	0,352	1	0,110	0,929
Вбудований генератор	-	0,402	0,712	0	0,039	0,109

Результати досліджень для вибірки 1000 елементів. Результати наведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

**Результати оцінок якості генераторів псевдовипадкових чисел для
вибірки об'ємом 1000 елементів**

Метод генерування послідовностей	№ вибірки	MX1	MX2	MX3	MX4	MX5
Метод Мартіна	1	0,581	5,317	38	0,062	0,442
	2	1,271	1,818	54	0,085	0,467
	3	1,635	3,449	50	0,094	0,510
Конгруентний метод	1	0,143	1,016	28	0,170	0,219
	2	3,156	0,107	56	0,076	0,553
	3	2,414	0,254	48	0,097	0,449
Вбудований генератор	-	0,402	0,712	27	0,054	0,264

Результати досліджень для вибірки 10000 елементів. Результати наведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

**Результати оцінок якості генераторів псевдовипадкових чисел для
вибірки об'ємом 10000 елементів**

Метод генерування послідовностей	№ вибірки	MX1	MX2	MX3	MX4	MX5
1	2	3	4	5	6	7
Метод Мартіна	1	1,188	1,149	279	0,034	0,371
	2	0,218	0,043	315	0,030	0,319
	3	0,191	0,619	296	0,035	0,348

1	2	3	4	5	6	7
Конгруентний метод	1	0,094	0,138	75	0,799	0,125
	2	0,194	0,315	97	0,585	0,143
	3	0,872	0,259	254	0,029	0,309
Вбудований генератор	-	0,600	0,350	532	0,068	0,500

Для методу Мартіна та конгруентного методу генерування псевдовипадкової послідовності чисел проводилося по три експерименти для вибірок різного об'єму з різними початковими значеннями. Тому, для того, щоб зробити вибір генератора, спочатку необхідно обґрунтувати вибір тієї чи іншої вибірки для двох зазначених методів генерування.

Так, згідно з даними у табл. 3.1 та використанням паретовських рішень для багатокритеріальних задач, для реалізації білого шуму методом Мартіна об'ємом вибірки 100 елементів краще вибрати вибірку № 1, для конгруентного метода також краще вибрати вибірку № 1.

Також, згідно з табл. 3.2, для вибірок об'ємом 1000 елементів для реалізації білого шуму методом Мартіна краще вибрати вибірку № 1, а для отримання реалізацій білого шуму конгруентним методом також краще вибрати вибірку № 1.

Необхідно звернути увагу, що згідно з даними табл. 3.1 та табл. 3.2, для вибірок об'ємом 100 та 1000 елементів найбільш вагомою за оцінками якості є ступінь відповідності реалізацій шумового сигналу, отриманого за допомогою вбудованого генератора (функція `unifrnd`).

Але для вибірок більшого об'єму результати вже різняться. Так, згідно з даними у табл. 3.3 та використанням паретовських рішень для багатокритеріальних задач, для реалізації білого шуму методом Мартіна об'ємом вибірки 10000 елементів краще вибрати вибірку № 2, а для отримання реалізацій білого шуму конгруентним методом краще вибрати вибірку № 1.

При порівнянні оцінок якості генераторів псевдовипадкової послідовності чисел об'ємом вибірки 10000 елементів можна зробити висновок, що найбільш вагомим є ступінь відповідності реалізацій шумового сигналу, отриманого за допомогою конгруентного метода.

Такі результати зумовлені тим, що при використанні методів, таких як конгруентний або метод Мартіна, для малих об'ємів вибірки (порядку 100-3000 елементів) результати не можуть носити повністю випадковий характер, але при використанні вибірок достатньо великого об'єму (більше 3000 елементів), вбудовані генератори дають гірші результати.

3.3. Основи створення алгоритмічно-програмного забезпечення для моделювання шумових сигналів

Перед тим, як перейти безпосередньо до опису алгоритму моделювання шумових сигналів необхідно навести деякі означення і властивості різницьових стохастичних рівнянь, які називають авторегресійними.

Серед імовірнісних моделей, що описують реальні явища, простими, конструктивно заданими є процеси авторегресії, які можна подати у такому вигляді:

$$\xi(\omega, kh) = - \sum_{n=1}^P a_n \xi(\omega, kh - nh) + \zeta(\omega, kh), \quad (3.1)$$

де $\{a_n, n = \overline{1, P}\}$ – послідовність коефіцієнтів авторегресії; $\zeta(\omega, kh)$ – дискретний білий шум з нульовим математичним сподіванням ($\mathbf{M}\{\zeta(\omega, kh)\} = 0$) і дисперсією $\mathbf{D}\{\zeta(\omega, kh)\} = \sigma^2$; P – порядок рівняння авторегресії.

Якщо корені комплексного характеристичного рівняння $Z^P + a_1 Z^{P-1} + \dots + a_P = 0$ лежать всередині одиничного кола, то рівняння (3.1) має стаціонарний розв'язок [4, 10, 16, 27 – 28, 52, 56]

$$\xi(\omega, kh) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \zeta(\omega, kh - nh). \quad (3.2)$$

Можна показати, що між послідовністю коефіцієнтів $\{a_n, n = \overline{0, P}\}$ рівняння (3.1) і послідовністю значень ядра $\{\varphi_n, n \in Z\}$ процесу (3.2) існують наступні залежності :

$$\begin{aligned} a_0 \varphi_0 &= 1 \\ \sum_{n=0}^s a_n \varphi_{s-n} &= 0, \quad s = \overline{1, P-1} \\ \sum_{n=0}^P a_n \varphi_{s-n} &= 0, \quad s = P, P+1, \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Із (3.3) безпосередньо витікають рекурентні співвідношення, зручні для реалізації при комп'ютерному моделюванні:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_s &= - \sum_{n=1}^s \varphi_n a_{s-n}, \quad s = \overline{1, P-1} \\ a_s &= - \sum_{i=n}^P \varphi_n a_{s-n}, \quad s = P, P+1, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Легко побачити, що формули (3.4) зворотні і можуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1 \\ \varphi_s &= - \sum_{n=1}^s a_n \varphi_{s-n}, \quad s = \overline{1, P-1} \\ \varphi_s &= - \sum_{i=n}^P a_n \varphi_{s-n}, \quad s = P, P+1, \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Основним інструментом у запропонованому методі моделювання є рівняння Юла-Уокера, які виводяться шляхом множення на $\xi(\omega, kh + sh)$ двох частин рівняння (3.1) і взяття математичного сподівання, що приводить до рекурентної залежності:

$$\sum_{n=0}^P a_n R_{s-n} = 0, \quad s=1,2,3,\dots, \quad a_0 = 1, \quad (3.6)$$

де R_s - кореляційна функція процесу (3.6):

$$R_s = \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \varphi_{n+s}. \quad (3.7)$$

Оскільки необхідно обчислювати послідовність коефіцієнтів $\{a_n, n = \overline{1, P}\}$ рівняння авторегресії (3.1), то співвідношення (3.6) треба записати у вигляді

$$\begin{aligned} a_1 R_0 + a_2 R_1 + \dots + a_P R_{P-1} &= -R_1 \\ a_1 R_1 + a_2 R_0 + \dots + a_P R_{P-2} &= -R_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_1 R_{P-1} + a_2 R_{P-2} + \dots + a_P R_0 &= -R_P \end{aligned}$$

Елементи R_{ij} кореляційної матриці порядку P

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_{P-1} \\ R_1 & R_0 & \dots & R_{P-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{P-1} & R_{P-2} & \dots & R_0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

залежать від різниці індексів $i-j$, тобто матриця (3.8) є теплицевою.

На основі наведеного вище метод комп'ютерного моделювання реалізацій дискретного стаціонарного лінійного випадкового процесу (3.2) полягає в наступному.

1. Оцінюються коефіцієнти $\{a_n, n = \overline{1, P}\}$, рівняння авторегресії (3.1) шляхом розв'язання системи рівнянь Юла-Уокера (3.6) по заданій кореляційній матриці (3.8).

2. Оцінюється послідовність ядер $\{\varphi_n, n = \overline{1, J}\}$ лінійного процесу (3.2) за рекурентними співвідношеннями (3.5) і послідовністю коефіцієнтів $\{a_n, n = \overline{1, P}\}$ при $a_0 \varphi_0 = 1$. Проводиться нормування отриманої множини відліків ядра $\{\varphi_n, n = \overline{0, J}\}$ за формулою

$$\hat{\varphi}_n = \frac{\varphi_n}{\sqrt{\sum_{n=0}^J \varphi_n^2}}, \quad n = \overline{0, J}.$$

3. Обчислюється оцінка кореляційної функції процесу (3.2) для подальшого порівняння із заданою кореляційною функцією за формулою

$$R_s = \sigma^2 \sum_{n=0}^{J-s} \hat{\varphi}_n \hat{\varphi}_{n+s}, \quad s = \overline{0, P}.$$

4. Визначається оцінка дисперсії за послідовністю коефіцієнтів $\{\hat{\varphi}_n, n = \overline{0, J}\}$ для контролю обчислень за формулою

$$\sigma_{\xi}^2 = \sigma^2 \sum_{n=0}^J \hat{\varphi}_n^2. \quad (3.9)$$

5. Визначається математичне сподівання білого шуму за формулою

$$m = \frac{m_{\xi}}{\sum_{n=0}^J \hat{\varphi}_n}. \quad (3.10)$$

6. Генеруються реалізації дискретного стаціонарного білого шуму (наприклад, із розподілами Гауса або Пуасона) з математичним сподіванням (3.10) та дисперсією, отриманої з формули (3.9).

7. Моделюються реалізації лінійного дискретного випадкового процесу $\{\xi_{\omega}(kh), k = \overline{0, K}\}$ за формулою

$$\xi_{\omega}(kh) = \sum_{n=0}^J \varphi(nh) \zeta_{\omega}(kh - nh).$$

Необхідно зауважити, що у випадку задання послідовності ядер $\{\varphi_n, n = \overline{1, J}\}$ оцінки послідовності коефіцієнтів $\{a_n, n = \overline{1, P}\}$ розраховуються за формулами (3.4), і тоді немає необхідності розв'язувати систему лінійних рівнянь (3.5).

РОЗДІЛ 4. СТАТИСТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦІОНАРНИХ ШУМОВИХ СИГНАЛІВ

4.1. Статистичне оцінювання характеристик стаціонарних процесів

Стаціонарні та ергодичні процеси. У класі стаціонарних випадкових процесів виділяється підмножина ергодичних процесів, які є конструктивною моделлю для статистичного оброблення даних вимірювань. Достатні і необхідні умови ергодичності процесу визначаються окремо для математичного сподівання, кореляційної функції і одновимірної функції розподілу. Наведемо необхідні і достатні умови ергодичності стаціонарного процесу $\xi(\omega, t)$:

а) відносно математичного сподівання a_1

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (1/c) \int_0^c R(\tau)(1 - \tau/c) d\tau = 0,$$

де $R(\tau)$ – автокореляційна функція процесу $\xi(\omega, t)$;

б) відносно автокореляційної функції $R(\tau)$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (1/c) \int_0^c R(s, \tau)(1 - s/c) ds = 0, \forall \tau,$$

де автокореляційна функція $R(s, \tau)$ є моментом четвертого порядку відносно процесу $\xi(\omega, t)$, оскільки сформований випадковий процес другого порядку

$$\zeta(\omega, \tau, t) = [\xi(\omega, t) - a_1][\xi(\omega, t + \tau) - a_1]$$

має такі характеристики: математичне сподівання процесу $\zeta(\omega, \tau, t)$ визначається як центральний момент другого порядку процесу $\xi(\omega, t)$

$$M\zeta(\omega, \tau, t) = R(\tau)$$

і відповідно його автокореляційна функція як центральний момент четвертого

порядку процесу $\xi(\omega, t)$

$$R(s, \tau) = \mathbf{M} \left[(\xi(\omega, \tau, t) - R(\tau)) (\xi(\omega, \tau, t + s) - R(\tau)) \right];$$

в) відносно одновимірної функції розподілу $F(x, t) \equiv F(x)$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (1/c) \int_0^c (F(x_1, x_2, \tau) - F(x_1)F(x_2)) (1 - \tau/c) d\tau = 0,$$

де $F(x_1, x_2, \tau)$ – двовимірна функція розподілу процесу $\xi(\omega, t)$.

Відзначимо, що всі зазначені умови ергодичності процесу $\xi(\omega, t)$ відносно своїх характеристик виражаються через інші характеристики того ж процесу $\xi(\omega, t)$, але на порядок більше. Так, для ергодичності математичного сподівання процесу $\xi(\omega, t)$ потрібні знання його кореляційної функції $R(\tau)$, для одновимірної функції розподілу $F(x)$ – знання двовимірної функції розподілу $F(x_1, x_2, \tau)$. Тому для більшості завдань вимірювань на практиці спочатку необхідно підтвердити гіпотезу про стаціонарність досліджуваного процесу з наступним підтвердженням гіпотези ергодичності процесу.

Статистичне оцінювання. Розглянемо характерні особливості визначення статистичних характеристик ергодичного процесу за даними вимірювання – часового ряду як реалізації досліджуваного процесу. Іншими словами, для апріорно заданого ергодичного процесу з невідомими характеристиками необхідно визначити їх статистичні оцінки і тим самим підтвердити або спростувати статистичну гіпотезу про адекватність моделі. Така постановка завдання є частинним випадком більш загальної задачі побудови (розробки, створення, обґрунтування) математичної моделі об'єкта дослідження за експериментальними даними (даними спостережень) різного роду. Рішення такого загального завдання неоднозначно і визначається обсягом, змістом експериментальних даних і апріорно відомими характеристиками моделі. Розглянемо два підходи до вирішення такого завдання: у вузькому сенсі, коли в якості експериментальних даних використовуються дані вимірювань; в

широкому сенсі, коли в якості експериментальних даних використовуються всі інші дані спостережень.

По суті, така класифікація первинних експериментальних даних для побудови моделі визначає і рівень достовірності результатів розв'язання задачі. Отримання даних вимірювань серед експериментальних даних є найбільш витратним як у часі, так і економічно і вимагає використання відповідних засобів вимірювальної техніки. У ряді випадків проводиться узгодження даних вимірювань, які стосуються одного і того ж об'єкту вимірювань, але самі вимірювальні експерименти проведені в різних місцях, в різний час і різними засобами вимірювань. У таких випадках проводиться їх попереднє статистичне опрацювання з метою створення єдиної бази даних вимірювань – як правило, ансамбля часових рядів. Основними операціями такого опрацювання є: видалення тренду, відсіювання грубих промахів, центрування і, за необхідності, нормування ряду. Разом з цим не можна нехтувати експериментальними даними будь-якого рівня, оскільки вони завжди вносять свій внесок у вирішення поставленого завдання. На рис. 4.1 зображена послідовність операцій отримання і опрацювання експериментальних даних у вузькому і широкому сенсах для обґрунтування моделі об'єкта вимірювання.

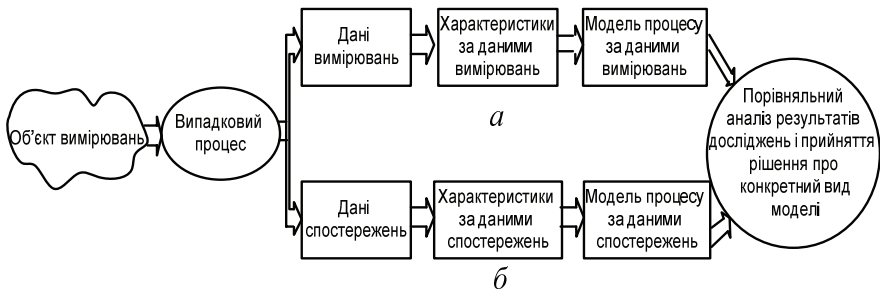


Рис. 4.1. Послідовність операцій отримання і опрацювання експериментальних даних для обґрунтування конкретного виду моделі об'єкта вимірювання: *а* – у вузькому сенсі; *б* – у широкому сенсі

Спочатку розглянемо випадок експериментальних даних у вузькому сенсі, коли за умовами експерименту і застосування ІВС є можливість отримати дані вимірювань. Реалізація процесу вимірювання передбачає використання двох мір – міри досліджуваної фізичної величини, яка необхідна для отримання її числового значення, і ймовірнісна міра, яка застосовується на етапі обґрунтуванні моделі вимірювального експерименту і в процесі статистичного опрацювання експериментальних даних і формування результату (рис. 4.2).

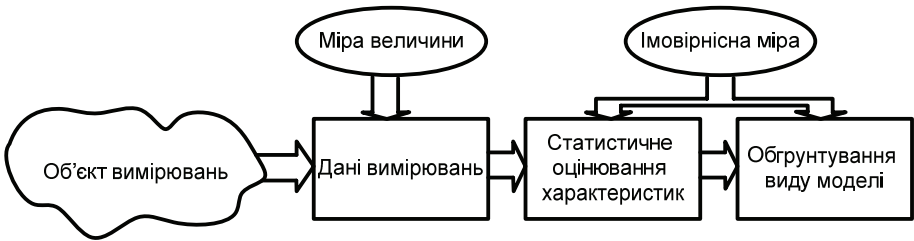


Рис. 4.2. Структура взаємозв'язків різних об'єктів в процесі отримання моделі за даними фізичних вимірювань

У другому випадку використовуються експериментальні дані в широкому сенсі. Такі дані (наприклад, результати спостережень, випробувань тощо) подаються неіменованими числами, тобто рееструються в числовому вигляді придатному для їх подальшого статистичного опрацювання. Проведення операцій з такими даними спостережень передбачає використання тільки ймовірнісної міри (рис. 4.3).

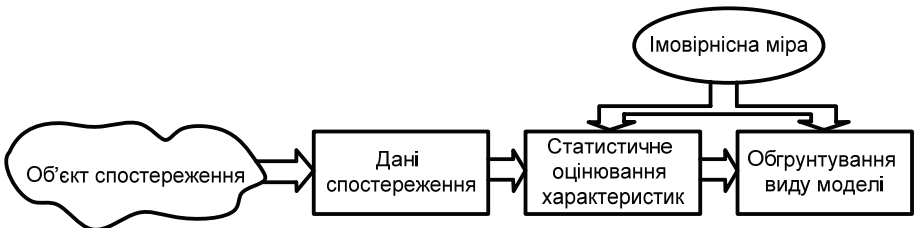


Рис. 4.3. Структура взаємозв'язків різних об'єктів в процесі отримання моделі за даними спостережень

Розглянемо відомі методи статистичного оцінювання характеристик випадкових процесів за експериментальними даними на конкретному прикладі.

Приклад. В результаті проведення експериментальних досліджень зареєстрована серія m реалізацій стаціонарного випадкового процесу $\xi(\omega, t)$ на скінченному інтервалі часу T . Серія реалізацій $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ задана на однакових скінченних часових інтервалах T і отримана за однакових умов проведення експерименту.

Графіки m реалізацій процесу $\xi(\omega, t)$ з різними варіантами усереднення наведені на рис. 4.4, на якому також показані стрілками два можливі методи усереднення для отримання статистичних оцінок характеристик процесу:

- 1) усереднення за множиною (ансамблем) реалізацій;
- 2) усереднення в часі за однією реалізацією.

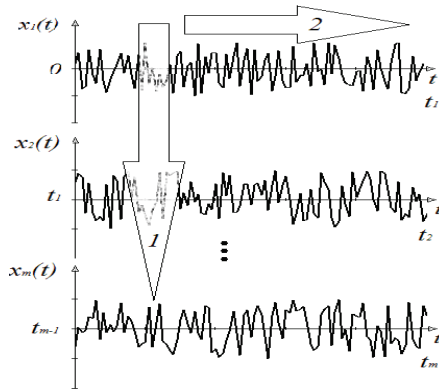


Рис. 4.4. Графіки серії m реалізацій $\{x_j(t), j = \overline{1, m}\}$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(\omega, t)$ та умовне позначення можливих методів усереднення за ансамблем реалізацій (1) і за однією реалізацією в часі (2)

Метод усереднення за ансамблем реалізацій є загальним методом статистичного оцінювання характеристик випадкових сигналів за

експериментальними даними. Такий метод використовується як для стаціонарних, так і для нестаціонарних випадкових процесів. Для нестаціонарних процесів метод використовується тільки в разі формування ансамблю синхронізованих у часі (тобто з однаковою початковою фазою розвитку процесу або його динаміки) реалізацій.

Метод усереднення в часі за однією реалізацією застосовують для ергодичних випадкових процесів. Зупинимося на цьому методі детальніше.

На практиці важливо знати, коли результати усереднення – середні – збігаються до певної величини і чи рівні середні за ансамблем реалізацій середнім у часі. Від цього залежить весь план вимірювального експерименту, його тривалість і економічні витрати. Ці питання є предметом розгляду ергодичної теорії, а досліджувані при цьому закони збіжності іменуються законами великих чисел або ергодичними теоремами.

Математичні моделі. На рис. 4.5 наведено графіки реалізацій стаціонарного процесу на кінцевому інтервалі часу T як вимірювального сигналу в трьох видах: неперервного сигналу (а); сигналу з дискретним часом (б); цифрового сигналу з дискретним часом і квантованими за рівнем значеннями (в).

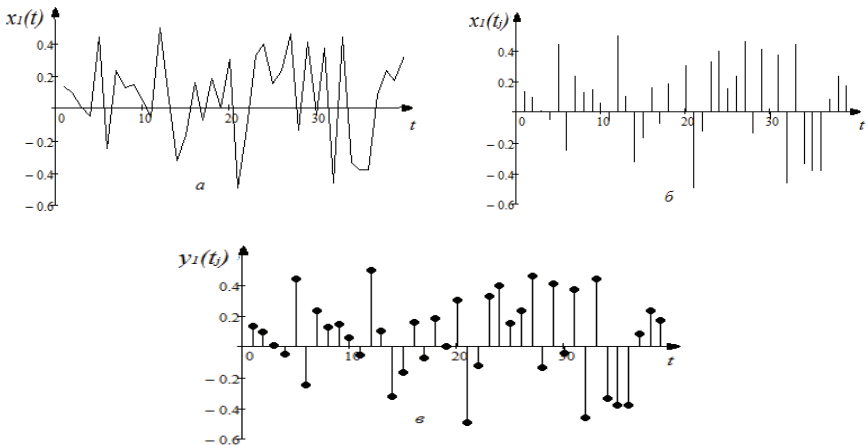


Рис. 4.5. Графіки досліджуваних вимірюваних сигналів:

а – неперервного $x(t)$; б – дискретизованого $x(t_j)$; в – цифрового $y_1(t_j)$

Випадковий процес $\xi(\omega, t)$ є функцією двох аргументів ω і t , перший з яких $\omega \in \Omega$ є неупорядкованим на просторі елементарних подій Ω . Така неупорядкованість і характеризує випадковість, стохастичність і непрогнозованість динаміки процесу $\xi(\omega, t)$ в часі. Аргумент t є впорядкованим у часі і для кожного фіксованого $t = t_1$ ми маємо переріз випадкового процесу $\xi(\omega, t)_{t=t_1}$ – випадкову величину $\xi_1(\omega)$.

Для вирішення завдань статистичного оцінювання характеристик випадкових процесів найбільший інтерес представляє дослідження динаміки і характерних особливостей простору Ω в часі, оскільки для цього використовується тільки ймовірність (ймовірнісна міра) якості їх оцінювання. Якщо простір Ω не залежить від часу, тобто залишається незмінним в часі, маємо стаціонарний, а у всіх інших – нестаціонарний випадки. Відомо також, що простір Ω змінюється у випадку різного роду перетворень вимірювальних сигналів в електронних трактах інформаційно-вимірювальних систем. Цей факт необхідно враховувати у статистичному оцінюванні характеристик випадкових процесів, а саме відмінність просторів елементарних подій Ω під час формування:

а) аналогових вимірювальних сигналів як множини реалізацій відповідних випадкових процесів для випадку $\Omega_1 \Rightarrow \{x_i(t), i \in N, t \in T\}$, де Ω_1 є нескінченною неперервною множиною і відображає випадковість механізму формування реалізацій;

б) дискретизації за часом аналогових сигналів $\{x_i(t)\}$

$$\Omega_2 \Rightarrow \{x_i(t_j), i, j \in N, t_j \in T\},$$

де множина Ω_2 в загальному випадку не є еквівалентною множині Ω_1 . Це пояснюється тим фактом, що дискретизація в часі проводиться не ідеальними перетворювачами, а реальними технічними пристроями, які вносять свою додаткову специфічну випадковість в досліджуваний сигнал $x_i(t_j)$ як відгук на

виході технічного пристрою на вхідну дію $x_i(t)$. Множина Ω_2 також є нескінченною і неперервною;

в) квантуванні за рівнем сигналів $\{x_i(t_j)\}$

$$\Omega_3 \Rightarrow \{y_i(t_j), i = \overline{1, d}, j \in N, t_j \in T\},$$

де простір Ω_3 , на відміну від Ω_1 і Ω_2 , є скінченною дискретною числовою множиною.

Математичною моделлю неперервної реалізації $x(t)$ (рис. 4.5, а), яка належить до класу аналогових вимірювальних сигналів, є стаціонарний процес $\xi(\omega, t), \omega \in \Omega_1, t \in (-\infty, \infty)$. Множини значень області визначення і області значень процесу $\xi(\omega, t)$ нескінченні і мають потужність континууму. Процес $\xi(\omega, t)$ породжує множину реалізацій $\{x_j(t), j \in N\}$, і кожна конкретна реалізація $x_j(t)$ відповідає конкретній елементарній події $\omega = \omega_1$ з нескінченного простору елементарних подій Ω_1 .

Розглянемо реалізацію процесу $x_i(t_j)$ (рис. 4.5, б), яку отримують як результат дискретизації в часі аналогового сигналу $x_i(t)$. Математична модель такої реалізації – стаціонарна послідовність неперервних випадкових величин $\xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_2), \dots, \xi(\omega, t_j), \dots, \omega \in \Omega_2, j \in N$.

Множини значень областей визначення і областей значення стаціонарної послідовності неперервних випадкових величин $\{\xi(\omega, t_j)\}$ також нескінченні, проте мають різну потужність, а саме: область визначення – зліченна (дискретна) множина, а область значень – множина (неперервна) потужності континууму.

Після квантування за рівнем значень процесу $\xi(\omega, t_j)$ маємо випадковий процес $\{\zeta(\omega, t_j), \omega \in \Omega_3, j \in N\}$ з дискретним часом і дискретними значеннями, який має скінченну множину рівнів квантування, нескінченну зліченну множину елементів t_j і скінченну дискретну множину значень $\zeta(\omega, t_j) \in Q$, де Q –

скінченна дискретна множина чисел. Отже процес $\{\zeta(\omega, t_j), \omega \in \Omega_3, j \in N\}$ є стаціонарною послідовністю дискретних випадкових величин $\xi(\omega, t_1), \dots, \xi(\omega, t_j), \omega \in \Omega_2, j \in N$.

Процес $\zeta(\omega, t_j)$ можна сформулювати двома способами:

1) за допомогою заданого неперервного процесу $\xi(\omega, t)$ шляхом дискретизації області визначення аргументу t і одночасного квантування за рівнем його області значень;

2) за допомогою заданого процесу $\xi(\omega, t_j)$ з дискретним часом шляхом квантування за рівнем його області значень.

Графік відповідної реалізації $y_i(t_j)$ на кінцевому інтервалі часу T процесу $\zeta(\omega, t_j)$ наведено на рис. 4.5 (в). Як правило, реалізації цього процесу як цифрові часові ряди задані на рівномірній часовій ґратці з постійним кроком

$$\Delta t = h: 0, h, 2h, \dots, (n-1)h, \quad (4.1)$$

де $[0, T = (n-1)h]$ – інтервал часу, який визначає область вимірювання цифрового часового ряду $y_i(t_j)$.

Таким чином, досліджуваний цифровий часовий ряд $y_i(t_j)$ можна позначати так:

$$y_i(j\Delta t) = y_i(jh) = y_i(t_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{0, n-1}, \quad (4.2)$$

тобто як i -ту реалізацію процесу $\zeta(\omega, t_j)$ на скінченному інтервалі часу T .

На підставі аналізу наведених вище моделей стаціонарних випадкових процесів розглянемо математичну модель, реалізацією якої є дані вимірювань в цифровому вигляді як цифровий часовий ряд на кінцевому інтервалі часу T .

Випадкова вибірка обсягу n як скінченновимірна послідовність випадкових величин

$$\zeta(\omega, t_1), \zeta(\omega, t_2), \dots, \zeta(\omega, t_n) = \{\zeta(\omega, t_j), \omega \in \Omega_3, j = \overline{1, n}\} \quad (4.3)$$

із генеральної сукупності послідовності випадкових величин

$$\{\zeta(\omega, t_j), \omega \in \Omega_3, j \in N\} \quad (4.4)$$

є математичною моделлю цифрового часового ряду, заданого на рівномірній часовій решітці (4.1) у виді (4.2), тобто

$$y(jh) = y(t_j), j = \overline{0, n-1}.$$

Якщо проводиться m вимірювальних експериментів, то послідовність m реалізацій формує матрицю даних вимірювань в цифровому вигляді – матрицю цифрових часових рядів

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & \cdots & y_1(t_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m(0) & \cdots & y_m(t_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Досліджувані характеристики випадкових процесів визначаються відповідними статистиками

$$\mathbf{T}_k(\zeta(\omega, t_1), \dots, \zeta(\omega, t_n)), k = 1, 2, \dots, g$$

як однозначно визначеними функціями кожної k -ї характеристики.

Статистична оцінка k -ї характеристики випадкової послідовності (4.4) визначається згідно $\mathbf{T}_k(y(0), \dots, y(t_{n-1}))$, де $y(0), \dots, y(t_{n-1})$ – часовий ряд даних вимірювань у вигляді (4.2) як реалізація (4.3).

Наведені характерні особливості статистичного оцінювання характеристик випадкових процесів за даними вимірювань у рамках кореляційної теорії не відображають всього діапазону багатоплановості і різноманітності завдань вимірювання. Так, наприклад, не розглянуті дуже важливі завдання вимірювань, коли результати вимірювань отримують у цифровій формі і виникають питання їх інтерполяції, апроксимації для первинних досліджуваних процесів, явищ, сигналів в аналоговому вигляді. Ця проблематика заслуговує на окремий розгляд.

4.2. Статистичне оцінювання стаціонарності шумового сигналу

Одним з перших завдань аналізу даних вимірювань і визначення характеристик шумових сигналів є перевірка даних на стаціонарність. Загальна постановка такого завдання полягає в перевірці статистичних гіпотез про стаціонарність досліджуваного шумового сигналу на підставі результатів статистичного оброблення отриманих експериментально реалізацій сигналу (часових рядів).

Результат статистичного оцінювання – приймається чи відхиляється гіпотеза про стаціонарність шумового сигналу – має принципове значення для подальшого статистичного оброблення даних вимірювань. На сьогодні в значній мірі розроблена методологія статистичного оброблення реалізацій стаціонарних шумових сигналів.

Розглянемо завдання статистичного оцінювання стаціонарності послідовності дискретних випадкових величин (4.4) за даними вимірів реалізацій випадкової вибірки послідовності (4.3) у вигляді двох цифрових часових рядів

$$\{y_1(ih) = y_1(t_i), i = \overline{0, n-1}\}, \{y_2(jh) = y_2(t_j), j = \overline{0, n-1}\}, \quad (4.5)$$

заданих на неперетинаючих інтервалах часу T_1 і T_2 , що як правило обирають рівними. Одним із статистичних методів вирішення такого роду завдань є метод перевірки статистичних гіпотез.

Сформулюємо дві (основну H_0 і альтернативну H_1) статистичні гіпотези: H_0 – послідовність (4.4) є стаціонарною; H_1 – послідовність (4.4) нестаціонарна. Статистична гіпотеза H_0 про стаціонарність послідовності (4.4) проти альтернативної гіпотези H_1 про нестаціонарність цієї послідовності перевіряється на основі реалізації випадкової вибірки (4.4) у вигляді двох цифрових часових рядів (4.5).

Розглянемо два варіанти вирішення сформульованого завдання про стаціонарність досліджуваної послідовності:

- 1) випадкова послідовність (4.4) розподілена за законом Гаусса;

2) випадкова послідовність (4.4) розподілена за іншим законом.

1) Для перевірки стаціонарності послідовності (4.4) за умови нормального закону розподілу скористаємось методами перевірки статистичних гіпотез на основі F - і t -критеріїв, які іменуються відповідно статистичними критеріями t -Стюдента і F -Фішера. Їх застосування дає змогу перевірити досліджувану послідовність за математичним сподіванням і дисперсією, що для гауссового розподілу послідовності (4.4) еквівалентно перевірці її на стаціонарність у вузькому сенсі.

Використання F -критерію Фішера. Гіпотеза о стаціонарності часового ряду з нормальним законом розподілу перевіряється при розбитті часового ряду на дві незалежні реалізації ($N = 2$) об'ємами n_1, n_2 . За цим критерієм перевіряється гіпотеза про рівність дисперсій за допомогою статистики:

$$W_{n_1-1, n_2-1} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1} \mu_2^{(1)}}{\frac{n_2}{n_2-1} \mu_2^{(2)}}, \quad (4.6)$$

де $\mu_2^{(1)}, \mu_2^{(2)}$ - незміщені оцінки дисперсій реалізацій часового ряду з об'ємами n_1, n_2 .

Треба зазначити, що при використанні статистики (4.6) у такому вигляді, повинна відбуватися умова $\mu_2^{(1)} > \mu_2^{(2)}$. В іншому випадку необхідно перенумерувати реалізації у зворотному порядку.

Критична область, яка відповідає даному випадку перевірки гіпотези про стаціонарність за дисперсією, будується наступним чином. За таблицями F -розподілу для деякого рівня значущості α знаходять значення $F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$. Якщо при заданому α отримане з (4.6) значення статистики буде меншим табличного значення $F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$, то розкид між дисперсіями вважається незначним і приймається гіпотеза про стаціонарність досліджуваного часового ряду.

Необхідно відмітити, що у розглянутому випадку перевірки на стаціонарність часового ряду за дисперсією немає ніяких припущень про математичне сподівання часового ряду. Тому з такої перевірки необхідно починати при дослідженні і тільки після того, як виникають сумніви по відношенню постійності математичного сподівання у часі, використовують іншу перевірку на стаціонарність часового ряду.

Двовибірковий t-критерій також використовується при розбитті часового ряду на дві незалежні реалізації, але перевірка відбувається за математичним сподіванням при постійній дисперсії. Гіпотеза про рівність математичних сподівань перевіряється за допомогою наступної статистики:

$$t = \frac{v_1^{(1)} - v_1^{(2)}}{\sqrt{n_1\mu_2^{(1)} + n_2\mu_2^{(2)}}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2}},$$

де $v_1^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ - оцінки математичних сподівань реалізацій об'ємами n_1 , n_2

Отриману статистику перевіряють з табличним значенням t -розподілу Ст'юдента $t_{m,1-\alpha/2}$, де $m = n_1 + n_2 - 2$. Різниця $v_1^{(1)} - v_1^{(2)}$ вважається незначною з деяким рівнем значущості α , якщо виконується умова $|t| \leq t_{m,1-\alpha/2}$. Отже, за такої умови приймається гіпотеза про стаціонарність часового ряду.

2) Для статистичного оцінювання стаціонарності послідовності дискретних випадкових величин (4.4) з відміним від гауссового розподілом за даними вимірів в рамках кореляційної теорії можна скористатися описаними вище параметричними F - і t -критеріями. Для більш ефективної перевірки на стаціонарність необхідно провести таку перевірку різними попарними комбінаціями на більшій ($m > 2$) кількості неперетинаючих інтервалах часу $\{T_j, j = \overline{1, m}\}$.

У практиці вимірювань зустрічаються і інші підходи до статистичного оцінювання стаціонарності послідовності (4.5) за даними вимірювань. Однак вони мають індивідуальний частинний характер і не реалізуються як типові методики

для негауссових розподілів.

4.3. Статистичне оцінювання часових характеристик стаціонарного шумового сигналу

Сформулюємо більш чітко постановку завдання статистичного оцінювання часових характеристик стаціонарного шумового сигналу у вигляді стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин (4.4), яка в загальному випадку є вкладеною випадковою послідовністю в стаціонарну послідовність неперервних випадкових величин $\{\xi(\omega, t_j)\}$. Послідовність $\{\xi(\omega, t_j)\}$ є дійсною, для неї виконується ергодична гіпотеза відносно перших чотирьох моментів, існування яких також передбачається.

Потрібно за даними вимірів досліджуваного процесу – цифрового часового ряду (4.2) обчислити статистичні оцінки математичного сподівання, дисперсії, автокореляційної функції і одновимірної емпіричної функції розподілу. Однією з умов успішного вирішення такого завдання є значний обсяг n цифрового часового ряду шумового сигналу.

Відомі варіанти вирішення такого завдання можна умовно розділити на дві групи:

- 1) часові ряди шумового сигналу задаються без урахування похибок їх вимірювань (ряди в широкому сенсі);
- 2) часові ряди шумового сигналу задаються з урахуванням похибок їх вимірювань (ряди у вузькому сенсі).

Характерним моментом статистичного оцінювання одновимірних часових характеристик стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин $\{\xi(\omega, t_j)\}$ – середнього (математичного сподівання) a_1 і дисперсії σ^2 – є той факт, що ці ймовірнісні в теоретичному сенсі характеристики є постійними величинами і не залежать від часу. Одновимірні функції розподілу $F(x)$, щільність розподілу

$p(x)$ і характеристична функція $f(u)$ послідовності $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ також не залежать від часу t . Двовимірні характеристики стаціонарного процесу – автоковаріаційна функція $B(\tau)$, автокореляційна функція $R(\tau)$, двовимірна функція розподілу $F(x_1, x_2; \tau)$ – залежать лише від різниці часу $\tau = t_2 - t_1$.

Така ідеалізація моделі стаціонарного шумового сигналу не має місця у практиці статистичного оцінювання характеристик шумового сигналу за даними вимірів. Вимірювання проводяться на скінченному інтервалі часу, на результати вимірювання діють як контрольовані, так і неконтрольовані, як правило, випадкові чинники. В результаті проведення статистичного оцінювання теоретичні числові постійні характеристики або функції детермінованих аргументів стаціонарного шумового сигналу стають функціями додаткових аргументів, наприклад обсягу вибірки, інтервалу часового вікна, похибок вимірювань, заокруглень результатів обчислень числових даних і інших. По суті мають місце невідповідності (неадекватності) моделі реальному досліджуваному процесу. І компроміс адекватності можна досягнути на рівні можливих похибок статистичного оцінювання, які не перевищують заданих. У більшості випадків дисперсія оцінки шуканої характеристики служить показником точності її статистичного оцінювання. Якщо за умовами завдання статистичного оцінювання вдається визначити довірчий інтервал із заданою ймовірністю оцінки шуканої характеристики, можна говорити про досягнення мети – вирішення завдання статистичного оцінювання в більш повному обсязі.

У більш суворій постановці завдання відповідності моделі результатам вимірювань використовується апарат математичної статистики, наприклад перевірка адекватності моделі та отриманих експериментальних даних на основі перевірки відповідних статистичних гіпотез на підставі обґрунтованого статистичного критерію.

Коротко наведемо основні алгоритми статистичного оцінювання зазначених характеристик стаціонарного шумового сигналу.

Статистичне оцінювання математичного сподівання. Статистична

оцінка математичного сподівання (середнього) стаціонарного шумового сигналу, для якого виконується ергодична гіпотеза відносно математичного сподівання, обчислюється усередненням в часі однієї реалізації стаціонарного шумового сигналу – цифрового часового ряду виду (4.2) за формулою

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y(t_j). \quad (4.7)$$

Оцінка \hat{b}_1 є незміщеною і ефективною, оскільки $\mathbf{M}\hat{b}_1 = a_1$.

Для конкретного цифрового часового ряду (4.2) оцінка \hat{b}_1 є середнім значенням і статистичною оцінкою математичного сподівання стаціонарного шумового сигналу.

Якщо відома кореляційна функція стаціонарного шумового сигналу у вигляді

$$R(k) = \mathbf{M} \left\{ \left[\zeta(\omega, t_j) - a_1 \right] \left[\zeta(\omega, t_{j+k}) - a_1 \right] \right\}, \quad (4.8)$$

то дисперсія оцінки математичного сподівання (4.7) визначається як

$$\mathbf{D}\hat{b}_1 = \mathbf{M} \left[\hat{b}_1 - a_1 \right]^2 = \frac{1}{n} \left[R(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right) R(k) \right], \quad (4.9)$$

де кількість значень функції $R(k)$ задана на скінченній множині точок, яка визначається обсягом вибірки n цифрового часового ряду.

У виразі (4.9) значення a_1 не входить в явному вигляді для обчислення дисперсії, але його знання необхідно при обчисленні за формулою (4.8).

На підставі аналізу завдання статистичного оцінювання характеристик стаціонарного шумового сигналу відносно статистичного оцінювання математичного сподівання a_1 стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ можна зробити такі висновки.

У більшості випадків для $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ невідомими є як a_1 , так і кореляційна функція $R(k)$. За результатами статистичного оцінювання визначають їх оцінки – \hat{b}_1 і $\hat{R}(k)$. У загальній постановці завдання статистичного оцінювання a_1 і $R(k)$

стаціонарного шумового сигналу не має загального розв'язку і це, ймовірно, є природним через різноплановість і різноманіття завдань статистичного оцінювання. У той же час на базі використання додаткових умов, наприклад для $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ заданий гауссовий закон розподілу або відома кореляційна характеристика $R(k)$ чи a_1 , завдання статистичного оцінювання вирішується в необхідному для практичного використання вигляді.

Статистичне оцінювання кореляційної функції. Статистична оцінка кореляційної функції часового ряду $y_i(t_j)$ визначається як

$$\tilde{R}(k) = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} (y(t_j) - \tilde{b}_1)(y(t_{j+k}) - \tilde{b}_1). \quad (4.10)$$

Ця оцінка асимптотично зміщена і в разі заміни випадкової величини \tilde{b}_1 на a_1 отримана за формулою (4.10) статистична оцінка кореляційної функції $\tilde{R}(k)$ стає асимптотично незміщеною, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}\tilde{R}(k) = R(k)$.

Відзначимо наступний факт, який має важливе практичне значення. У випадку обчислення статистичних оцінок кореляційної функції стаціонарного шумового сигналу у вигляді стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин (4.4), для якої виконується ергодична гіпотеза щодо кореляційної функції за даними вимірів – цифрового часового ряду (4.2), використовується не класична форма визначення кореляційної функції, а так зване *кореляційне перетворення* – дія відповідного кореляційного оператора у вигляді (4.10).

Таким чином, оцінка $\tilde{R}(k)$ є відгуком кореляційного оператора, який здійснює усереднення за часом добутків вихідного центрованного часового ряду $\{y(t_j) - \tilde{b}_1\}$ на зсунутий в часі центрований часовий ряд $\{y(t_{j+k}) - \tilde{b}_1\}$. Якщо $k = 0$, обчислюється статистична оцінка дисперсії $\tilde{R}(0) = \tilde{\sigma}^2$. Дисперсія статистичної оцінки $\tilde{R}(k)$ визначається за формулою

$$\mathbf{D}\tilde{R}(k) = \left[R(k, 0) + 2 \sum_{j=1}^{n-k-1} (1 - j/(n-k)) R(k, s) \right] / (n-k-1),$$

тобто формується випадкова послідовність другого порядку відносно досліджуваної стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ виду $\zeta(\omega, \tau, t) = [\zeta(\omega, t_j) - a_1][\zeta(\omega, t_{j+\tau}) - a_1]$, потім визначається її математичне сподівання $M\zeta(\omega, \tau, t) = R(\tau)$ і відповідно її автокореляційна функція як центральний момент четвертого порядку послідовності $\{\zeta(\omega, t_j)\}$:

$$R(s, \tau) = M [\zeta(\omega, \tau, t) - R(\tau)][\zeta(\omega, \tau, t + s) - R(\tau)].$$

Отже, дисперсія статистичної оцінки $\tilde{R}(k)$ стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин $\{\zeta(\omega, t_j)\}$, що задовольняє ергодичній гіпотезі відносно кореляційної функції визначається, якщо задана функція $R(s, \tau)$ – четвертий центральний момент послідовності $\{\zeta(\omega, t_j)\}$.

Статистичне оцінювання одновимірної функції розподілу. Це одне з найпоширеніших завдань статистичного оцінювання для стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин $\{\zeta(\omega, t_j)\}$.

Вибіркова функція розподілу є випадковою, а кожна її реалізація – кусково-постійна функція x , що змінюється від 0 до 1 тільки стрибками, число яких дорівнює n . Реалізація функції $F_n(x)$ іноді визначається безпосередньо, та в більшості практичних випадків ґрунтується на використанні гістограм як реалізацій щільності розподілу.

Результати вирішення завдання статистичного оцінювання одновимірної функції розподілу наступні:

а) статистична оцінка одновимірної функції розподілу $\tilde{F}(x)$, обчислена з часового ряду (4.2), характеризує стаціонарну послідовність дискретних випадкових величин (4.4) і не залежить від часу t ;

б) для виконання необхідної і достатньої умови ергодичності одновимірної функції розподілу $F(x)$ послідовності $\{\zeta(\omega, t_j)\}$, необхідно виконання умови

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [F(x_1, x_2; \tau) - F(x_1)F(x_2)] \cdot (1 - j/n) = 0, \forall \tau, \quad (4.11)$$

де $F(x_1, x_2; \tau)$ – двовимірна функція розподілу послідовності, представлена у вигляді (4.4).

У більшості випадків перевірка виконання умови (4.11) викликає на практиці певні труднощі. Тому, якщо виконані умови ергодичності щодо математичного сподівання і кореляційної функції для досліджуваного стаціонарного шумового сигналу, то можна припустити можливість застосування ергодичної гіпотези і для одновимірної функції розподілу $F(x)$.

4.4. Статистичне оцінювання спектральних характеристик стаціонарного шумового сигналу

Серед прикладних методів статистичного оцінювання спектральної щільності потужності стаціонарних шумових сигналів виділяють наступні:

- 1) на основі перетворення Фур'є реалізацій стаціонарного шумового сигналу;
- 2) на основі перетворення Фур'є статистичної оцінки кореляційної функції стаціонарного шумового сигналу (теорема Вінера – Хінчина);
- 3) на основі використання вузькосмугової лінійної фільтрації реалізацій стаціонарного шумового сигналу, зведення в квадрат відгуків з подальшим їх усередненням за ансамблем.

Розглянемо статистичне оцінювання таких спектральних характеристик для двох стаціонарних і стаціонарно зв'язаних послідовностей дискретних випадкових процесів $\{\zeta_1(\omega, t_j)\}$ і $\{\zeta_2(\omega, t_j)\}$:

- спектральних щільностей потужності $S_{11}(f)$ і $S_{22}(f)$;
- взаємної спектральної щільностей потужності $S_{12}(f)$;
- функції когерентності $v^2(f)$ як нормованої спільної функції четвертого

порядку статистичного взаємозв'язку центрованих послідовностей $\{\zeta_1(\omega, t_j)\}$ і $\{\zeta_2(\omega, t_j)\}$ в частотній області, яка визначається виразом

$$v^2(f) = |S_{12}(f)|^2 / S_{11}(f) \cdot S_{22}(f), \quad v^2(f) \in [0, 1].$$

Цифрові вимірювальні сигнали у вигляді часових рядів мають скінчений обсяг n елементів. Частота дискретизації неперервних вимірювальних сигналів і число рівнів квантування для кожного конкретного завдання вибирається на підставі апріорних даних сигналів. Таким чином, на вхід підсистеми статистичного оцінювання спектральних характеристик стаціонарних шумових сигналів надходить два цифрових часових ряда $\{\zeta_1(\omega, t_j)\}$ і $\{\zeta_2(\omega, t_j)\}$ як реалізації досліджуваних послідовностей, кожна з яких має вигляд

$$\{y_1(ih) = y_1(t_i), i = \overline{0, n-1}\} \text{ і } \{y_2(jh) = y_2(t_j), j = \overline{0, n-1}\}, \quad (4.12)$$

де $h = \Delta t$ – постійний крок рівномірної часової ґратки завдання відліків.

Надалі розглядатимемо обидва часових ряда (4.12) з однаковими об'ємом n відліків і часом дискретизації Δt , тобто вираз (4.12) можна записати у вигляді $\{y_m(ih) = y_m(t_i), m = \overline{1, 2}, i = \overline{0, n-1}\}$.

Розглянемо послідовність обчислень спектральних характеристик методами цифрового опрацювання часових рядів.

1. На початковому першому етапі попереднього статистичного опрацювання вихідних цифрових часових рядів виконують:

- а) видалення промахів, помилкових значень відліків ряду;
- б) цифрову фільтрацію;
- в) видалення тренду;
- г) центрування обох часових рядів:

- якщо відомо середнє досліджуваної послідовності $\{ {}_m a_1, m = \overline{1, 2} \}$, то

$$\bar{y}_m(ih) = y_m(ih) - {}_m a_1 = \bar{y}_m(t_i), m = \overline{1, 2}, i = \overline{0, n-1};$$

- якщо $\{ {}_m a_1, m = \overline{1, 2} \}$ невідоме, то для операції центрування

використовується її статистична оцінка $\{m \tilde{b}_1, m = \overline{1, 2}\}$, тоді

$$\tilde{y}_m(ih) = \tilde{y}_m(t_i) = y_m(ih) - m \tilde{b}_1, m = \overline{1, 2}, i = \overline{0, n-1}. \quad (4.13)$$

Кожен з часових рядів (4.13), що використовується для цифрового статистичного опрацювання, представляє центрований цифровий часовий ряд з n відліками як реалізацію випадкової вибірки центрованої стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин $\{\zeta(\omega, t_i)\}$.

2. На другому етапі попереднього статистичного опрацювання рекомендується з метою підвищення якості (як правило, зменшення дисперсії статистичних оцінок) статистичного оцінювання спектральних характеристик стаціонарного шумового сигналу виконувати:

а) розбиття вихідного часового ряду (4.13) на k відрізків однаково обсягу N , створення ансамблю з K реалізацій і використання в подальшому метод усереднення за ансамблем статистичних оцінок досліджуваних спектральних характеристик;

б) множення вихідного часового ряду (4.13) на часове вагове вікно $W(t_i)$, вибір виду якого ґрунтується на постановці завдання статистичного оцінювання спектральних характеристик і апіорних даних про досліджуваний випадковий процес, а також спектральній характеристиці вагового вікна $W(t_i)$.

Таким чином, кожен з центрованих цифрових часових рядів $\tilde{y}_m(ih)$, $m = \overline{1, 2}$, $i = \overline{0, n-1}$ розбивається на K ділянок (рис. 4.6).

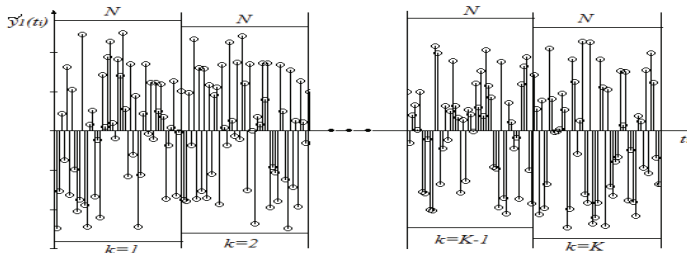


Рис. 4.6. Графічна ілюстрація розбиття досліджуваного центрованого цифрового часового ряду з n відліками на K ділянок з N відліками на кожній

Отже для подальшого статистичного оправування для кожного часового ряду (4.13) сформовано ансамбль K реалізацій виду

$$Z_m(t_j) = \tilde{y}_m(t_j)w(t_j) = \begin{cases} Z_{m1}(t_j) \\ \vdots \\ Z_{mk}(t_j), \quad m = \overline{1,2}, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad k = \overline{1, K}, \quad i = j + (k-1)N \\ \vdots \\ Z_{mK}(t_j) \end{cases}$$

3. Для кожної реалізації з $\{Z_{mk}(t_j), m = \overline{1,2}, k = \overline{1, K}, j = \overline{0, N-1}\}$ виконуються наступні операції:

а) дискретне перетворення Фур'є (ДПФ), на практиці в більшості випадків використовується економний з огляду на число обчислювальних операцій спосіб реалізації ДПФ – швидке перетворення Фур'є

$$F_{mk}(f_g) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} Z_{mk}(t_i) \cdot \exp(-j2\pi \cdot i \cdot g/N); \quad (4.14)$$

б) модуль виразу (4.14) підноситься до квадрату: $|F_{mk}(f_g)|^2$;

в) використовується метод усереднення за ансамблем K компонент (4.14) і визначається статистична оцінка двосторонньої спектральної щільності стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ виразом

$$S_{mm}(f_g) = \frac{1}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{mk}(f_g)|^2, \quad g = \overline{0, N-1}.$$

Для розрахунку оцінки спектральної щільності $S_{mm}(f_g)$ використовуються дискретні значення частот $f_g = g/N\Delta t, g = \overline{0, N-1}$.

Статистична оцінка односторонньої спектральної щільності $S_{mm}(f_g)$ визначається як

$$G_{mm}(f_g) = \frac{2}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{mk}(f_g)|^2, \quad g = \overline{0, N/2}.$$

4. На четвертому етапі статистичного оцінювання спектральних характеристик стаціонарної послідовності дискретних випадкових величин

$\{\zeta(\omega, t_j)\}$ визначають наступні статистичні оцінки.

1). Односторонні спектральні щільності:

а) стаціонарної послідовності $\{\zeta_1(\omega, t_j)\}$ у вигляді

$$G_{11}(f_g) = \frac{2}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{1k}(f_g)|^2, g = \overline{0, N/2};$$

б) стаціонарної послідовності $\{\zeta_2(\omega, t_j)\}$ у вигляді

$$G_{22}(f_g) = \frac{2}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{2k}(f_g)|^2, g = \overline{0, N/2}.$$

2). Односторонню взаємну спектральну щільність стаціонарних послідовностей $\{\zeta_1(\omega, t_j)\}$ і $\{\zeta_2(\omega, t_j)\}$ у вигляді

$$G_{12}(f_g) = \frac{2}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{1k}(f_g) \cdot F_{2k}(f_g)|^2, g = \overline{0, N/2}.$$

3). Функції когерентності

$$v^2(f_g) = |G_{12}(f_g)|^2 / [G_{11}(f_g) \cdot G_{22}(f_g)], g = \overline{0, N/2}.$$

Слід зазначити наступне. В аналізі результатів статистичного оцінювання наведених вище спектральних характеристик стаціонарної послідовності виникають питання чисто вимірювального (метрологічного) плану. Так, не наведено вирази для оцінки якості отриманих статистичних оцінок спектральних характеристик, наприклад вирази для дисперсії оцінок. Такі результати можуть бути отримані тільки для конкретних завдань статистичного оцінювання спектральних характеристик з використанням додаткових апріорних відомостей про моделі вимірюваних сигналів, частотний діапазон спектральних характеристик та ін. Тому в наведену вище типову методику статистичного оцінювання спектральних характеристик стаціонарних послідовностей результати таких досліджень не були включені.

5. На заключному етапі статистичного оцінювання спектральних характеристик стаціонарних процесів проводиться аналіз отриманих результатів;

у ряді випадків з урахуванням використання конкретних вагових вікон, вводяться масштабні коефіцієнти. За результатами проведеного аналізу приймається рішення про досягнення або недосягнення поставленої мети статистичного оцінювання спектральної щільності потужності стаціонарної послідовності.

Результати статистичного оцінювання спектральної щільності потужності стаціонарних процесів також використовуються і в ряді інших завдань, наприклад для статистичного оцінювання аналогічних характеристик як функцій часу нестационарного шумового сигналу, а також для дослідження адитивної суміші двох стаціонарних незалежних шумових сигналів.

РОЗДІЛ 5. СУЧАСНИЙ НАПРЯМ СТАТИСТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ШУМОВИХ СИГНАЛІВ

5.1. Метод «Гусениця-SSA» для виділення трендової складової шумового сигналу

Значний внесок у дослідження та практичне використання методу сингулярного спектрального аналізу (Гусениця – SSA) зробили радянські вчені В.М. Бухштабер та Н.Е. Голяндіна.

Метою застосування даного методу є розкладання часового ряду на адитивні складові, які піддаються певній інтерпретації. Метод не потребує виконання умови стаціонарності ряду та знання моделі тренду. За такої обмеженої апріорної інформації метод «Гусениця» може вирішувати низку різних задач [14 – 15, 57]:

- виділення тренду;
- визначення циклічних компонент;
- згладжування ряду;
- побудови повного розкладання ряду на суму тренду, циклічних та стохастичних компонент.

Недоліками методу є:

- істотно неавтоматизований процес групування компонент сингулярного розкладання траєкторної матриці для отримання компонент вихідного ряду;
- суттєва залежність швидкості розрахунків від довжини часового ряду та довжини вікна аналізу.

Алгоритм методу складається з двох етапів: декомпозиції та відновлення.

Етап декомпозиції. Етап декомпозиції складається з двох послідовних кроків

Крок 1. Вкладення. Процедура «вкладення» переводить початковий часовий ряд $P[j]$ в послідовність векторів довжиною L ($1 < L < J$) (двовимірний масив). Число L – так звану довжину вікна – необхідно обґрунтувати, базуючись на фізичній природі формування часового ряду. Існує правило, що для розділення компонент часового ряду число L повинно дорівнювати найбільшому періоду компонент наявних в досліджуваному часовому ряді. Зазвичай вибирають довжину вікна рівній половині довжини часового ряду. Але при аналізі великих часових рядів це призведе до значного збільшення часу необхідного на аналіз. За наявності інформації про періоди компонент в досліджуваному часовому ряді, цього можна уникнути.

В результаті процедури «вкладення» отримують $K = J - L$ векторів $X_i = (p_i, \dots, p_{i+L})^T, 1 \leq i \leq K$, які мають розмірність L та утворюють L -траекторну матрицю ряду $P[j]$

$$\mathbf{X} = [X_1 : \dots : X_K],$$

яка складається з векторів «вкладення» в якості стовбців.

Іншими словами, траекторна матриця – це матриця виду

$$\mathbf{X} = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_K \\ p_2 & p_3 & \dots & p_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ p_L & p_{L+1} & \dots & p_J \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Сингулярна декомпозиція. Далі до отриманої траекторної матриці застосовують сингулярну декомпозицію: розкладання на елементарні матриці.

Сингулярна декомпозиція є основним математичним підґрунтям методу. В результаті сингулярної декомпозиції матриці \mathbf{X} , отримують власні числа матриці $\lambda_1, \dots, \lambda_L$, власний U_i та факторний V_i сингулярні вектори матриці \mathbf{X} . Сингулярна декомпозиція матриці \mathbf{X} може бути записана як

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad d = \max\{i, \lambda_i > 0\}.$$

Набір $(\sqrt{\lambda_i} U_i V_i)$ називається i -ою власною трійкою матриці \mathbf{X} . Рядки та стовбці траскторної матриці є відрізками початкового часового ряду, тому лівий та правий сингулярні вектори також мають часову структуру та можуть розглядатися як часові ряди.

Етап відновлення. Етап відновлення починається з групування елементарних матриць за певними характеристиками.

Крок 3. Групування. Метою групування є розділення адитивних компонент ряду.

Множину індексів елементарних матриць $i = \{1, \dots, d\}$ ділять на N неперетинних підмножин I_1, \dots, I_N . Нехай $I_1 = \{1, 2, 3\}$, тоді $\mathbf{X}_{I_1} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3$ – сума відповідної групи елементарних матриць які відповідають за одну окрему адитивну компоненту вихідного числового ряду $P[j]$. В такий спосіб утворюються N груп $(\mathbf{X}_{I_1} \dots \mathbf{X}_{I_k} \dots \mathbf{X}_{I_N})$ та розділяють N адитивних компонент. Внесок кожної окремої групи (\mathbf{X}_{I_k}) в декомпозиції $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_k} + \dots + \mathbf{X}_{I_N}$ виражається як частка відповідних власних чисел: $\sum_{i \in I_k} \lambda_i / \sum_{i=1}^L \lambda_i$.

Крок 4. Діагональне усереднення. Для перетворення групи елементарних матриць в числовий ряд – компоненту вихідного ряду $P[j]$ – застосовують операцію діагонального усереднення.

Нехай \mathbf{X}_{I_1} – $L \times K$ матриця. Діагональне усереднення переводить матрицю \mathbf{X}_{I_1} в ряд $R[j]$ довжиною J за формулою:

$$R[j] = \begin{cases} \frac{1}{j} \sum_{m=1}^j \mathbf{X}_{I_1}[m, j-m+1], & \text{для } 1 \leq j < L, \\ \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L \mathbf{X}_{I_1}[m, j-m+1], & \text{для } L \leq j < K, \\ \frac{1}{J-j} \sum_{m=j-K+1}^{J-K} \mathbf{X}_{I_1}[m, j-m+1], & \text{для } K \leq j < J. \end{cases}$$

Застосовуючи діагональне усереднення до всіх груп елементарних матриць X_{I_k} , отримуємо нові ряди $R^{(k)}[j]$, тобто вихідний ряд $P[j]$ розкладається на суму N компонент:

$$P[j] = \sum_{k=1}^N R^{(k)}[j].$$

Компоненти, які формуються в такий спосіб з початкових даних, суттєво залежать від вибору груп елементарних матриць. Тому коректність аналізу значною мірою залежить від підготовки оператора.

5.2. Метод виявлення миттєвих розладів часових рядів для знаходження інтервалів стаціонарності шумових сигналів

Під розладом зазвичай розуміють будь-які зміни параметрів системи, процеси, що виникають миттєво або дуже швидко в порівнянні з характерним періодом вимірювань [3, 5, 18]. Проблема виявлення моментів розладів виникає в багатьох задачах контролю та діагностики технічних систем.

Можна представити наступну класифікацію видів розладу:

1. «Випадковий викид» - являє собою одиничну зміну математичного сподівання процесу. Імітує дію короткочасного збурюючого фактора, який збив центр налаштування технологічного процесу, наприклад, ударна дія на технологічне обладнання.

2. «Зсув середнього» - являє собою зміну математичного сподівання випадкових величин на певному часовому інтервалі випадкового процесу, імітує небажаний збій налаштування технологічного процесу або, наприклад, зміни рівня подачі сировини.

3. «Зсув дисперсії» - являє собою зміну дисперсії на певному часовому інтервалі процесу. Це може бути викликано зміною оператора, виходом з ладу вимірювального приладу і т.п.

4. Повільна флуктуація – «тренд». Являє собою зміну математичного сподівання на деякому часовому інтервалі процесу за лінійним законом у часі. Це систематичне "сповзання" центру налаштування технологічного процесу. Такий розлад може бути пов'язаний, наприклад, з поступовим зношуванням обладнання.

5. Швидка флуктуація – «коливання». Представляє собою коливання математичного сподівання на певному часовому інтервалі процесу за синусоїдальним законом. Подібний розлад може бути викликаний деяким періодично діючим чинником, наприклад, намотуванням бруду на обертальний вал.

Для знаходження різних видів розладу використовується велика кількість алгоритмів та критеріїв [5 – 7, 18, 41 – 42], таких, наприклад, як алгоритми кумулятивних сум, Сегена-Сандерсона, Надлера-Робінза, ряд алгоритмів з пам'яттю тощо. Але недоліком цих алгоритмів є те, що вони вузьконаправлені та потребують деяких апріорних значень, що не завжди відомі при обробці часових рядів. Також, слід зауважити, що зазначені алгоритми мають низьку ефективність при складних випадках наявності різних типів розладів у досліджуваному часовому ряді (ЧР).

Згідно з наведеною вище класифікацією видів розладів, можна зробити висновок, що таку класифікацію можна звести до більш простої:

- «зсув середнього»;
- «зсув дисперсії»;
- «тренд».

На базі спрощеної класифікації видів розладів був розроблений алгоритм виявлення миттєвих розладів ЧР, структурно-логічна схема якого представлена на рис. 5.1.

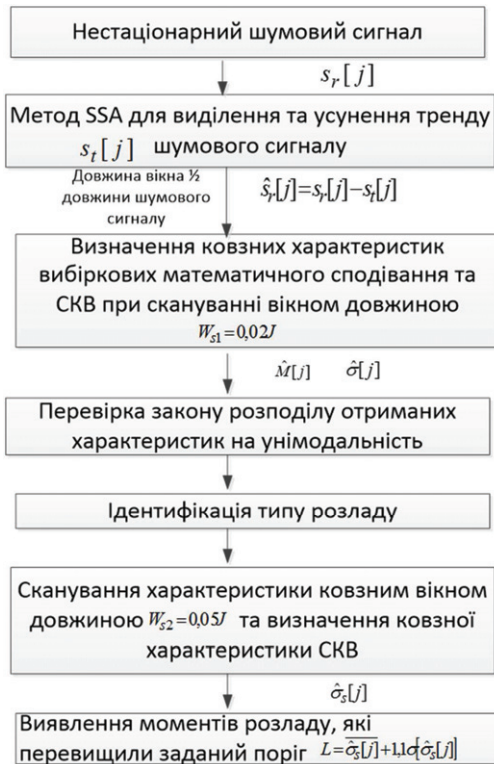


Рис. 5.1. Структурно-логічна схема методу виявлення миттєвих розладів часових рядів шумових сигналів

Значна кількість шумових сигналів у виді часових рядів представляють собою нестационарні багатоконпонентні дані. При наявності в досліджуваних ЧР монотонного тренду, його виділення є першочерговою задачею та відноситься до процедур попередньої обробки часового ряду. Відомим методом попереднього опрацювання ЧР який передбачає виділення тренду та циклічних компонент є метод сингулярного спектрального аналізу (Гусениця – SSA). Алгоритм методу складається з двох етапів: декомпозиції та відновлення. На етапі декомпозиції відбувається перетворення часового ряду на траєкторну матрицю та розкладання її на елементарні матриці. На етапі відновлення отримані елементарні матриці групують для розділення адитивних компонент

часового ряду. Потім до згрупованих елементарних матриць застосовують операцію діагонального усереднення і отримують виділені адитивні компоненти. Більш детально такий метод буде представлено у наступному підрозділі.

Для виявлення факту наявності розладу, а також для визначення їх моментів можна застосувати аналіз з використанням ковзної віконної статистичної обробки. Для цього вздовж досліджуваного ЧР шумового сигнал переміщують ковзне вікно, на інтервалі якого визначають ковзні статистичні характеристики математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення. З огляду на це було сформульовано наступний метод виявлення, ідентифікації та визначення розладів часових рядів.

1. До досліджуваного ЧР $s_r[j]$ застосовують метод SSA з параметром довжини вікна розкладу рівним 1/2 або 1/3 довжини ЧР та виділяють першу компоненту – тренд ЧР $\hat{s}_t[j]$ (рис. 5.2,а):

$$SSA[s_r[j]] \rightarrow \hat{s}_t[j]$$

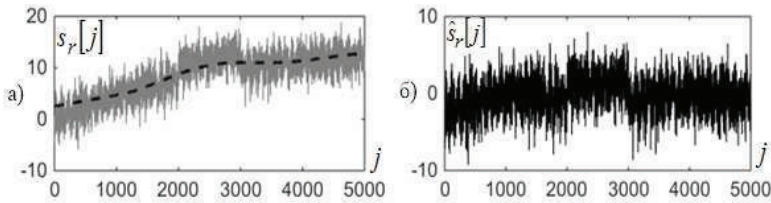


Рис. 5.2. Графіки а) досліджуваного ЧР $s_r[j]$ та виділеного тренду $\hat{s}_t[j]$,

б) їх різниці $\hat{s}_r[j]$

2. Подальшу обробку виконують для різниці досліджуваного ЧР та виділеного тренду (рис. 5.2,б):

$$\hat{s}_r[j] = s_r[j] - \hat{s}_t[j]$$

3. Сканують ЧР $\hat{s}_r[j]$ ковзним вікном довжиною $W_{S1}=0,02J$ та визначають ковзні характеристики вибірових математичного сподівання $\hat{M}[j]$ та середньоквадратичного відхилення $\hat{\sigma}[j]$.

4. Перевіряють характер закону розподілу отриманих характеристик $\hat{M}[j]$ та $\hat{\sigma}[j]$. У випадку наявності розладу типу «зсуву дисперсії» або «зсуву середнього», відповідні характеристики мають багатомодальні закони розподілу (рис 5.3, рис 5.4). В дослідженні для перевірки на унімодальність використаний критерій Хартігана [62].

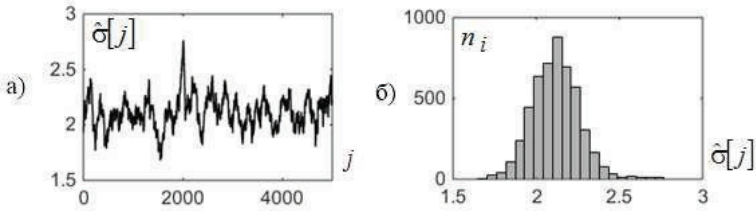


Рис. 5.3. Графіки ковзної характеристики вибіркового середньоквадратичного відхилення $\hat{\sigma}[j]$ (а), та її полігон частот (б) при наявності розладу типу «зсув середнього»

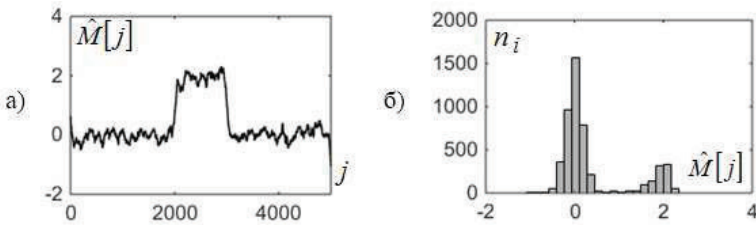


Рис. 5.4. Графіки ковзної характеристики вибіркового математичного сподівання $\hat{M}[j]$ (а), та її полігон частот (б) при наявності розладу типу «зсув середнього»

5. Після виявлення факту розладу та ідентифікації її типу використовують ковзний аналіз відповідної характеристики ($\hat{M}[j]$ або $\hat{\sigma}[j]$ згідно з рис. 5.3-5.4) для визначення моментів розладу.

Для цього сканують відповідну характеристику ковзним вікном довжиною $W_{S2}=0,05J$ та визначають ковзну характеристику середньоквадратичного

відхилення $\hat{\sigma}_S[j]$. Ділянки характеристики $\hat{\sigma}_S[j]$, що перевищують граничне значення $L = \overline{\hat{\sigma}_S[j]} + 1,1\sigma[\hat{\sigma}_S[j]]$ вважають такими, що вказують на початок і кінець розладу (рис. 5.5).

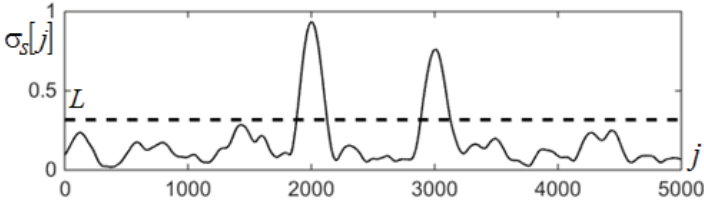


Рис .5.5. Ілюстрація ознаки виявлення розладу

Після знаходження миттєвих розладів та ідентифікації їх виду можна переходити безпосередньо до оцінки характеристик шумових сигналів, але для кожного інтервалу даного сигналу окремо.

5.3. Критерій Хартігана для перевірки шумового сигналу на унімодальність

На сьогодні існує декілька статистичних тестів для виявлення наявності більше одного закону у розподілі. Так, тест Вулфа використовує відношення правдоподібності для двокomпонентного нормального розподілу при нульовій гіпотезі про однокомпонентний нормальний розподіл. Тест, запропонований Енгельманом та Хартіганом ділить множину значень вибірки на дві підмножини та знаходить відношення максимальної правдоподібності при нульовій гіпотезі про те, що ці дві підмножини є рівними. Але у даних тестів є вагомий недолік. Кожен з них працює тільки у випадку, коли вибірки підпорядковуються нормальному закону розподілу.

Авторами запропоновано для перевірки шумового сигналу на унімодальність використовувати критерій Хартігана або ДПП-статистику [62]. Така статистика розраховується як максимальна різниця між емпіричною та

унімодальною функціями розподілу. Статистика може бути обрхована в порядку n операцій для n спостережень, крім того вона підходить для тестування будь-якого унімодального розподілу проти будь-якого багатомодального розподілу.

Перед тим, як навести алгоритм знаходження ДПП-статистики, необхідно дати деякі визначення.

Функція розподілу F є унімодальною з деякою модою m , якщо вона є опуклою на інтервалі $(-\infty, m]$ та вогнутою на інтервалі $[m, \infty)$.

Нехай розподіл G представляє собою деякий емпіричний розподіл. Необхідно визначити

$$\rho(F, G) = \sup_x |F(x) - G(x)|$$

для будь-яких обмежених функцій розподілу F, G . Для цього визначається

$$\rho(F, A) = \inf_{G \in A} \rho(F, G)$$

для будь-якого класу A обмежених функцій. Нехай U – клас унімодальних функцій розподілу. ДПП-статистика функцій розподілу F визначається як

$$D(F) = \rho(F, U). \quad (5.1)$$

Необхідно відмітити, що

$$D(F_1) \leq D(F_2) + \rho(F_1, F_2),$$

$$D(F) = 0, \text{ якщо } F \in U,$$

$$D(F) > 0, \text{ якщо } F \notin U.$$

Таким чином, значення D вимірює відхилення від унімодальності.

Найбільшою опуклою мінорантою розподілу F на інтервалі $(-\infty, a]$ є $\sup G(x)$ при $x \leq a$, де мажоранта береться по всім функціям G , які є опуклими тільки на інтервалі $(-\infty, a]$.

Найменшою вогнутою мажорантою розподілу F на інтервалі $[a, \infty)$ є $\inf L(x)$ при $x \geq a$, де міноранта береться по всім функціям L , які є вогнутими тільки на інтервалі $[a, \infty)$.

Необхідно розширити визначення ДПП-статистики для обмежених функцій розподілу F , постійних на інтервалах $(-\infty, 0]$ та $[1, \infty)$. В такому випадку клас функцій U також є постійним на зазначеному вище інтервалі, а для деякого значення моди m , де $0 \leq m \leq 1$ є опуклою на інтервалі $[0, m]$ та вогнутою на інтервалі $[m, 1]$. У такому випадку ДПП-статистику також можна знайти за формулою (5.1).

Для дискретної функції розподілу, якою є емпірична функція розподілу, існує наступний алгоритм обчислення критерію Хартігана.

Нехай значення x_1, x_2, \dots, x_n є точками функції розподілу F . Єдиними можливими точками модельного інтервалу є точки (x_L, x_U) . Розглядається $n \binom{n-1}{2}$ можливих модальних інтервалів та розраховується для кожного відрізка $[x_i, x_j]$ найбільша опукла міноранта на інтервалі $(-\infty, x_i]$ та найменша вогнута мажоранта на інтервалі $[x_j, \infty)$.

Нехай d_{ij} - максимальна відстань від розподілу F до визначених кривих. Тоді $2D(F)$ є мінімальним значенням d_{ij} за всіма відрізками $[x_i, x_j]$.

5.4. Дослідження ефективності використання методу виявлення миттєвих розладів часових рядів шумових сигналів

Загальна методика модельного дослідження. Як модель часового ряду використано дискретну реалізацію багатокomпонентного циклічного сигналу:

$$s[j] = \sum_{i=1}^m (s_i[j]) + n[j], \quad s_i[j] = S_i[j] \cos(\Phi_i[j]),$$

де $s_i[j]$ – i -та циклічна компонента, $n[j]$ – реалізація гауссового стаціонарного шуму, для якого $M_n = 0$, $D_n = \sigma^2$, $S_i[j]$ – амплітудна характеристика i -ї циклічної компоненти, $\Phi_i[j]$ – фазова характеристика i -ї циклічної компоненти, $j=1 \dots J$, J – обсяг реалізації. Виконується властивість – $s_i[j] \in L_2$ і для $s_i[j]$ існує перетворення

Гільберта, максимальне значення не перевищує $0,5\sigma$.

Розлад моделюється шляхом модифікації реалізації $s[j]$. Дослідження проводилося для розладу типу «зсув середнього», математична модель якої представлена наступним чином:

$$s_r[j] = \begin{cases} s[j], & j \notin k, k = k_{\min} \dots k_{\max}, \\ s[j] + M_s, & j \in k, k = k_{\min} \dots k_{\max}. \end{cases}$$

Межі інтервалу розладу (k_{\min} та k_{\max}) відомі та задаються при моделюванні.

Величина M_s визначається інтенсивністю розладу K_R :

$$K_R = \frac{M_s}{\sigma} - \text{для розладу типу «зсув середнього»};$$

$$K_R = \frac{\sigma_s}{\sigma} - 1 - \text{для розладу типу «зсув дисперсії»}.$$

Початковими значеннями параметрів моделювання прийняті:

- інтенсивність розладу $K_R \in [0; 2]$;
- кількість циклічних компонент $i = 1$;
- амплітудна характеристика циклічної компоненти: $S_i[j] = 1$;
- фазова характеристика циклічної компоненти $\Phi_i[j] = jT_D$;
- період дискретизації $T_D = 1 \times 10^{-5}$ с;
- обсяг реалізації $J = 5000$;
- середньоквадратичне відхилення реалізації гауссового стаціонарного шуму $\sigma = 2$;
- моменти розладу: $k_{\min} = 2000$, $k_{\max} = 3000$;
- кількість повторень експерименту на кожному значенні інтенсивності розладу $L = 10000$.

Зупинимося більш детально на кожному дослідженні методу виявлення миттєвих розладів часових рядів шумових сигналів.

Дослідження залежності значення критерію Хартігана від інтенсивності розладу. Вимірювальні експерименти проводилися за схемою представленою на рис. 5.6. В ході експериментів визначалася залежність

значення ДІП-статистики DIP_S при різних значеннях інтенсивності розладу K_R .

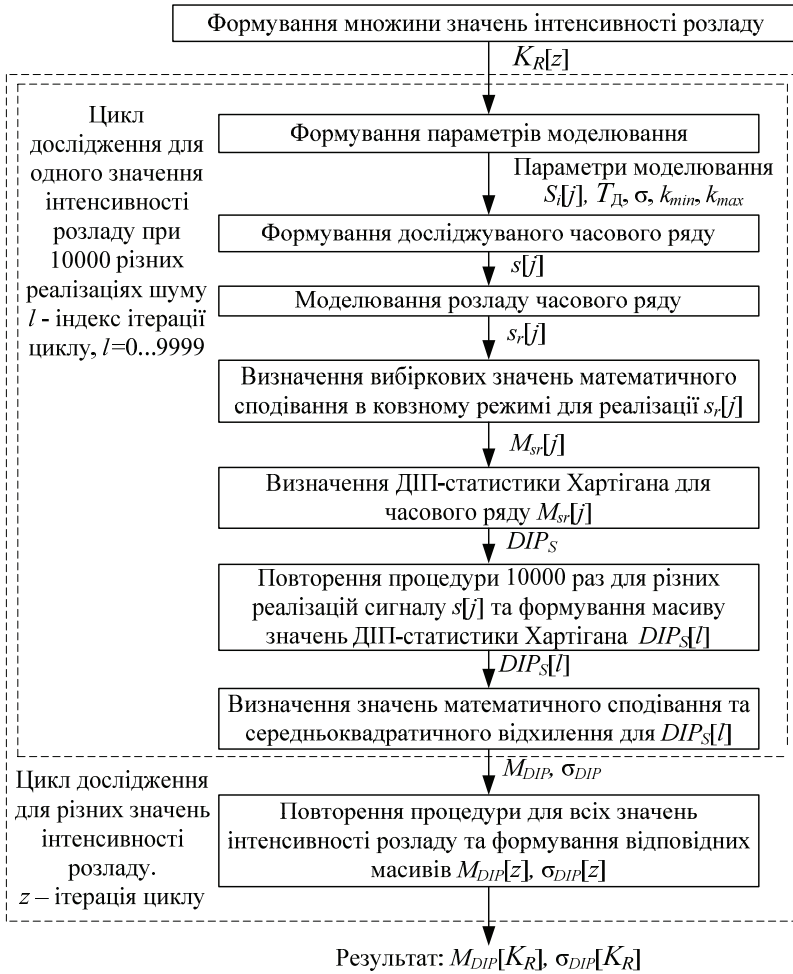


Рис. 5.6. Структурно-логічна схема проведення комп'ютерного експерименту для дослідження залежності значення ДІП-статистики від інтенсивності розладу

В результаті експерименту отримали множини залежностей $M_{DIP}[K_R]$ та $\sigma_{DIP}[K_R]$, які графічним способом представлені на рис. 5.7.

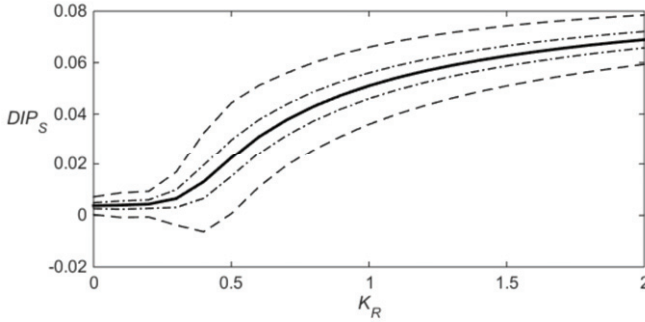


Рис. 5.7. Графічне представлення результатів експерименту для розлау типу «зсув дисперсії»:

(—) – $M_{DIP}[K_R]$; (· · ·) – $M_{DIP}[K_R] \pm \sigma_{DIP}[K_R]$; (- -) – $M_{DIP}[K_R] \pm 3\sigma_{DIP}[K_R]$

За отриманими даними можливо визначити імовірність (P) виконання гіпотези про унімодальність розподілу досліджуваної реалізації [62]. Графік залежності імовірності виконання гіпотези про унімодальність, тобто відсутності розладу, від інтенсивності розладу представлено на рис. 5.8. На графіку суцільною лінією представлено математичне сподівання імовірності P ($M_P[K_R]$), пунктиром – середньоквадратичне відхилення імовірності P ($\sigma_P[K_R]$).

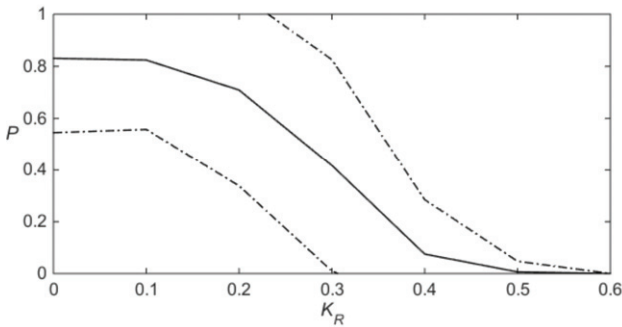


Рис. 5.8. Графічне представлення залежності імовірності відсутності розладу від інтенсивності розладу: (—) – $M_P[K_R]$; (· · ·) – $M_P[K_R] \pm \sigma_P[K_R]$

Аналіз отриманих результатів дозволяє стверджувати про можливість виявлення за допомогою представленого методу розлад часових рядів із інтенсивності розладу $K_R \geq 0,5$ з імовірністю $P=0,95$.

Дослідження достовірності виявлення моментів розладу. Для перевірки достовірності запропонованого методу було проведено комп'ютерне випробування, в якому застосовували представлений метод до модельованих ЧР з відповідними типами розладів.

В табл. 5.1 представлено усереднені результати експериментів.

Таблиця 5.1

Результати дослідження достовірності представленого метода

Інтенсивність розладу K_R	Середня кількість виявлених моментів розладу	Середня кількість правильно визначених моментів	Середня кількість помилок першого роду	Відсоток помилок першого роду, %	Середня кількість помилок другого роду
<0,1	0	0	2	100	0
0,2	0,79	0	2	100	0,79
0,3	2,86	0,33	1,62	81	2,53
0,4	3,75	1,26	0,73	36,5	2,49
0,5	3,61	1,82	0,18	9	1,79
0,6	2,89	1,94	0,06	3	0,95
0,7	2,5	1,99	0,01	0,5	0,51
0,8	2,26	1,99	0,01	0,5	0,27
0,9	2,15	1,99	0,01	0,5	0,16
1	2,07	2	0	0	0,07
1,1	2,02	2	0	0	0,02
>1,2	2	2	0	0	0

З огляду на отримані результати експерименту, можна стверджувати що запропонований метод дозволяє успішно виявляти факт наявності розладу, ідентифікувати тип розладу та визначати моменти початку і кінця розладу для інтенсивності розладу $>0,7$ з імовірністю помилки першого роду $<0,5\%$ та імовірністю помилки другого роду $<25\%$. При інтенсивності розладу >1 , імовірності помилок першого та другого роду не перевищують 0% та 3% відповідно.

Дослідження визначення точності моментів розладу. Вимірювальні експерименти проводилися за схемою представленою на рис. 5.9. В ході експериментів визначалася залежність похибки визначення координат точок розладу від значення інтенсивності розладу K_R .

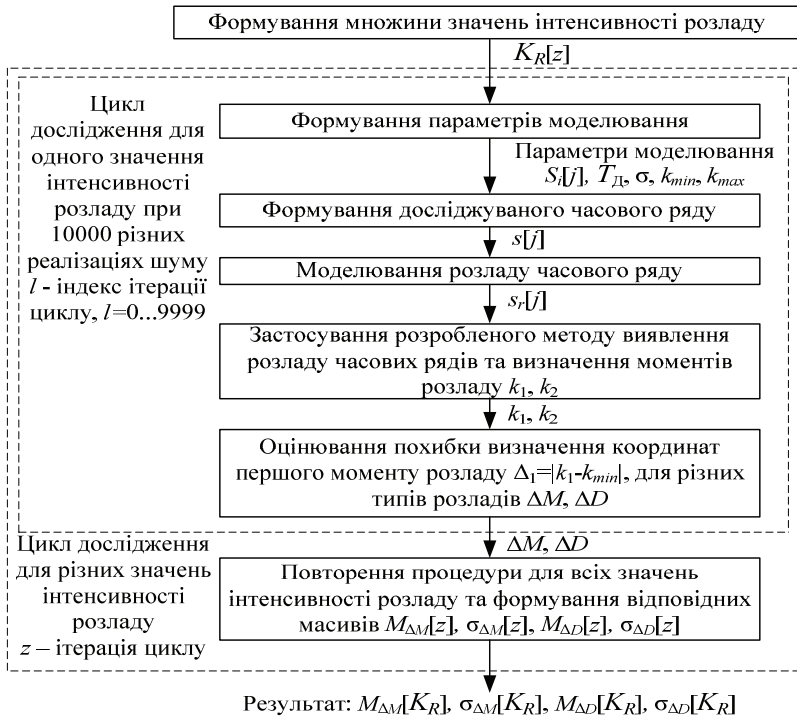


Рис. 5.9. Структурно-логічна схема проведення комп'ютерного експерименту для оцінювання точності визначення координат точок розладу

В ході експерименту були отримані наступні результати, представлені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Результати дослідження точності виявлення моментів розладу

Інтенсивність розладу	Похибка визначення точок розладу типу «зсув середнього»	СКВ похибки	Похибка визначення точок розладу типу «зсув дисперсії»	СКВ похибки
0,7	16,75	11,25	1,55	1,24
0,8	13,43	10,27	1,39	1,18
0,9	10,41	8,98	1,26	1,12
1	8,78	7,70	1,28	1,13
1,1	7,13	6,17	0,85	0,92
1,2	6,31	5,38	0,99	0,99
1,3	5,87	5,06	1,08	1,04
1,4	5,42	4,79	1,16	1,08
1,5	5,07	4,58	1,34	1,16
1,6	4,80	4,40	1,42	1,19
1,7	4,55	4,32	1,54	1,24
1,8	4,16	3,32	1,72	1,31
1,9	3,90	3,20	1,85	1,36
2	3,74	3,03	2,01	1,42

Як видно з табл. 5.2, середнє значення похибки «зсув середнього» не перевищує 7,2 відліків, а похибки «зсув дисперсії» 1,4 відліку, що свідчить про точне виявлення моментів розладу при інтенсивності розладу більше 0,7.

Запропонований метод виявлення, ідентифікації типу розладу та визначення моментів полягає у застосування процедур ітераційного ковзного сканування досліджуваного часового ряду, визначення вибірових статистичних

характеристик та за їх аналізом прийняття відповідних рішень про наявність, тип та моменти розладу.

Провівши всі вище зазначені дослідження можна стверджувати про те, що метод виявлення миттєвих розладів часових рядів є досить точним методом, який допоможе розділити будь-який нестационарний шумових сигнал на кусково-стационарні інтервали, що допоможе у визначенні характеристик отриманих шумових сигналів.

Результати проведених комп'ютерних модельних експериментів підтверджують працездатність метода та дозволяють оцінити його достовірність. Метод можна вважати перспективним для подальших досліджень

ПІДСУМКИ

1. З метою більш чіткої інтерпретації подальших матеріалів монографії спочатку наведено означення шумового сигналу у такій редакції: шумовий сигнал – це інтегрована сума сформованих в часі і в просторі значної кількості елементарних імпульсних сигналів стохастичної фізичної природи під дією енергетичних впливів різних збурень, у тому числі електромагнітних, механічних, теплових, оптичних та ін.

2. Розглядаючи шумовий сигнал як предмет досліджень сформульовано дві принципово протилежні та актуальні науково-технічні проблеми шумових сигналів:

- класичні задачі зменшення впливу шумових сигналів при передаванні, прийманні, виявленні, перетворенні та опрацюванні сигналів при дії завад в телекомунікаційних та інших інформаційних системах;

- шумові сигнали є предметом досліджень, інформаційний ресурс яких у значній мірі доповнює відомі, а в ряді випадків визначає основні характеристики динаміки в часі і в просторі стану і режимів функціонування досліджуваних об'єктів.

До основних завдань досліджень шумових сигналів слід віднести:

- обґрунтування досліджуваних явищ, процесів і систем з шумовими сигналами;

- створення фізичних моделей для досліджуваних явищ, процесів і систем;

- розробку методів статистичного оцінювання характеристик шумових сигналів;

- створення відповідного інформаційного забезпечення;

- розробку відповідного апаратного та програмного забезпечення.

3. Наведено основні предметні області використання шумових сигналів. Показано, що за областями застосування шумові сигнали присутні у біомедицині, системах зв'язку, техніці надійності тощо, а за характером

використання шумові сигнали використовують як тест-сигнали, зонди при дослідженнях мікроскопічних явищ, ширококутові сигнали або як засоби аналізу.

4. Основними характеристиками шумового сигналу як випадкового процесу є:

- статистичні характеристики: функція розподілу ймовірності; щільність розподілу ймовірності; математичне сподівання; дисперсія; автокореляційна функція;

- енергетичні характеристики: миттєва потужність; енергія сигналу; спектральна щільність потужності.

5. Наведено приклади типових шумових сигналів. Приведено модель теплових шумів як шумів, які найбільш часто зустрічаються.

6. Описано безмежно подільні закони розподілу суми незалежних випадкових величин як основний результат теоретичного фундаменту побудови моделей шумових сигналів.

7. Вдосконалено загальну модель шумового сигналу об'єкта енергетики у вигляді тривимірного векторного випадкового процесу та на її основі запропоновано конструктивну модель шумового сигналу з кусково-стаціонарними лінійними та гармонізовними випадковими процесами, що дозволило використати відомі статистичні методи опрацювання даних моделювання та вимірювання досліджуваних шумових сигналів при розробці алгоритмічно-програмного забезпечення та визначити нові діагностичні ознаки: трендову компоненту, моменти розладу, інтервали стаціонарності.

8. При моделюванні шумових сигналів необхідно приділити увагу генерації білого шуму, який є первинним джерелом формування всіх шумових сигналів. В залежності від якостей генераторів білого шуму будуть залежати якості всіх змодельованих білих шумів. Через це розроблено рекомендації по вибору генератора псевдовипадкових чисел з рівномірним законом розподілу для отримання реалізацій білого шуму.

В якості генераторів псевдовипадкової послідовності чисел були використані:

- метод Мартіна, де наступне число з послідовності обирається за формулою $X_{n+1} =]c \times X_n[$, де $] [$ означає операцію взяття дробової частини числового добутку, що міститься між цими дужками;

- конгруентний метод, де наступне число з послідовності обирається за формулою $X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$, при чому в якості значень a , c , m використовувалися різні значення;

- вбудований у середовищі Matlab генератор з рівномірним законом розподілу (функція `unifrnd`).

Результати дослідження показали, що при для реалізацій білого шуму з рівномірним законом розподілу для вибірок малого об'єму (до 3000 елементів), кращу ступінь відповідності реалізацій має вбудований у середовище Matlab генератор (функція `unifrnd`), але при використанні реалізацій білого шуму більшого об'єму (більше 3000 елементів) вагомішим стає вже конгруентний метод генерації псевдовипадкової послідовності чисел. Метод Мартіна не проявив себе як кращий за характеристиками якості для жодного об'єму вибірки.

9. У теорії і практиці статистичного оцінювання найбільш повно розроблені моделі, алгоритми і програмне забезпечення обчислення статистичних оцінок характеристик стаціонарних випадкових процесів. Характеристиками стаціонарних процесів є: математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція, спектральна щільність потужності і одновимірна функція розподілу.

До інформаційного забезпечення статистичного оцінювання стаціонарних процесів відносять математичні моделі, їх основні статистичні характеристики, алгоритми і програмне забезпечення розрахунків статистичних оцінок характеристик стаціонарних процесів.

10. Більшість методів статистичного аналізу сигналів, виміряних у різних точках об'єктів дослідження чи у різних напрямках, ґрунтуються на їх моделях у

вигляді стаціонарних випадкових процесів. Однак, розглядаючи такі сигнали як часові ряди і застосовуючи до них критерії перевірки на стаціонарність, можна зробити висновок, що більшість із них є нестаціонарними. Отже, на практиці інформаційні сигнали із фізичної точки зору, зазвичай, не можна безпосередньо описати стаціонарними моделями. Тому необхідно вирішувати задачу пошуку таких шляхів попередньої обробки інформаційних сигналів, які б дозволяли виділяти інтервали, на яких сигнали можна розглядати як умовно стаціонарні. Для аналізу таких сигналів досліджено виявлення миттєвих часових моментів розладу сигналів, за умови, що нестаціонарний сигнал можна розглядати як кусково-стаціонарний на різних інтервалах стаціонарності.

11. З метою оцінювання ефективності, точності та граничних можливостей запропонованого методу виявлення миттєвих часових моментів розладу шумових сигналів було проведено експериментальне дослідження хаосвих рядів.

Аналіз результатів дослідження залежності значення критерію Хартігана від інтенсивності розладу дозволяє стверджувати про можливість виявлення за допомогою представленого методу розладів часових рядів за інтенсивності розладу $K_R \geq 0,5$ з імовірністю $P=0,95$.

З огляду на отримані результати експерименту щодо достовірності виявлення моментів розладу, можна стверджувати що запропонований метод дозволяє успішно виявляти факт наявності розладу, ідентифікувати її тип та визначати миттєві моменти розладу для інтенсивності розладу $>0,7$ з імовірністю помилки першого роду $<0,5\%$ та імовірністю помилки другого роду $<25\%$. При інтенсивності розладу >1 , імовірності помилок першого та другого роду не перевищують $0,1\%$ та 3% відповідно.

При дослідженні точності виявлення моментів розладу були знайдені середні значення похибки «зсув середнього» та «зсув дисперсії», які не перевищують $7,2$ та $1,4$ відліків відповідно, що свідчить про точне виявлення моментів розладу при інтенсивності розладу більше $0,7$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Ажмухамедов М. Методика оценки качества последовательности случайных чисел / М. Ажмухамедов, Н. А. Колесова // Вестник АГТУ. Сер: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2. – С. 141-148.
2. Алексеев В.В. Виртуальные средства измерений / В.В. Алексеев // Приборы. 2009. – № 6. – С. 1-7.
3. Бассвиль М. Обнаружение изменения свойств сигналов в динамических системах / М. Бассвиль. – М.: Мир, 1989. – 278 с.
4. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол [пер. с англ. В.Е. Привальский] – М.: Мир, 1989. – 540 с.
5. Бродский Б. Е. Асимптотически оптимальные методы в задаче скорейшего обнаружения разладки. Характеристики методов скорейшего обнаружения разладки / Б. Е. Бродский // Автоматика и телемеханика. – 1995. – №9. – С. 60-72.
6. Бродский Б. Е. Сравнительный анализ некоторых непараметрических методов скорейшего обнаружения момента разладки случайной последовательности / Б. Е. Бродский, Б. С. Дарховский // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – № 4. – С. 655-668.
7. Букреев В. Г. Выявление закономерностей во временных рядах в задачах распознавания состояний динамических объектов / В. Г. Букреев, С. И. Колесникова, А. Е. Янковская. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 254 с.
8. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции: в 3 т. / Г. Ван Трис. – М.: Сов. радио, 1972. – Т. 1. – 1972. – 744 с.
9. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. – [2-е изд., стер.]. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
10. Виленкин С. Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций / С.Я. Виленкин. – М.: Энергия, 1979. – 320 с.

11. "Віртуальні еталони" як засіб підвищення точності вимірювань / [В.В. Остапів, Н.М. Піндус, С.А. Чеховський, Н.Б. Ключко] // Системи обробки інформації. – 2016. – Вип. 6 (143). – С. 108-111.
12. Гладышев Э.Г. Периодически и почтипериодически коррелированные процессы с непрерывным временем / Э.Г. Гладышев // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – Вып. 2. – С. 184-189.
13. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: [учебник] / Б.В. Гнеденко. – [изд. 8-е испр. и доп.]. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.
14. Голяндина Н. Э. Метод «Гусеница» - SSA: Анализ временных рядов / Н. Э. Голяндина. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 2004. – 76 с.
15. Данилова Д.Л. Главные компоненты временных рядов: метод "Гусеница" / Д.Л. Данилова, А.А. Жиглявский. – СПб.: Пресском, 1997. – 325 с.
16. Драган Я.П. Структура и представление моделей стохастических сигналов / Я.П. Драган. – К.: Наукова думка, 1980. – 384 с.
17. Єріна А.М. Методологія наукових досліджень: [навч. посібник] / А.М. Єріна, В.Б. Захожай, Д.Л. Єрін. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 212 с.
18. Жиглявский А.А. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники / А.А. Жиглявский, А.Е. Красковский. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1988. – 224 с.
19. Жовинский А.Н. Инженерный экспресс-анализ случайных процессов / А.Н. Жовинский, В.Н. Жовинский. – М.: «Энергия», 1979. – 116 с.
20. Золоторев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин / В.М. Золоторев. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
21. Иванов М.А. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайной последовательности / М.А. Иванов, И.В. Чугунков. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. – 240 с.

22. Казакова Н. Ф. Поэтапное тестирование и подбор составных элементов генераторов псевдослучайных последовательностей / Н. Ф. Казакова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – № 2/8 (44). – С. 44-48.
23. Коваленко Д.С. Исследование применимости алгебраического подхода к анализу временных рядов / Д. С. Коваленко, В. А. Костенко, Е. А. Васин // Методы и средства обработки информации. – М.: Изд-во ВМиК МГУ, 2005. – С. 553-559.
24. Красильников А.И. Модели шумовых сигналов в системах диагностики теплоэнергетического оборудования /А.И. Красильников . – К.: Ин-т технической теплофизики НАН Украина, 2014. – 112 с.
25. Кузнецов А. А. Исследование статистической безопасности генераторов псевдослучайных чисел / А. А. Кузнецов, Р. В. Королев, Ю. Н. Рябуха // Системи обробки інформації. – 2008. – Вип. 3(70). – С. 79-82.
26. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов / Е.И. Куликов. – М.: Радио и связь, 1986. – 272 с., ил.
27. Лоэв М. Теория вероятностей. / М. Лоэв – М.: Из-во ин. лит. – 1962. – 719 с.
28. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл-мл.; [пер. с англ.]. – М.: Мир, 1990. – 584 с., ил.
29. Мартинюк Г.В. Аналіз генераторів псевдовипадкових чисел за метрологічними характеристиками / Г.В. Мартинюк, Ю.Ю. Оникієнко, Л.М. Щербак // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2016. – Т. 1/9 (79) – С. 25-30.
30. Мартинюк Г.В. Метрологический мониторинг систем измерения характеристик шумовых процессов / Г.В. Мартинюк, Л.М. Щербак // Системи обробки інформації. – 2016. – Вип. 6 (143). – С. 82-85.

31. Мартинюк Г.В. Основи інформаційного забезпечення досліджень шумових процесів / Г.В. Мартинюк // Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. праць. – 2016. – Вип. 77. – С. 26-32.
32. Мартинюк Г.В. Статистичний аналіз кореляційних характеристик псевдовипадкових шумових сигналів / Г.В. Мартинюк, Л.М. Щербак // Вісник інженерної академії наук. – 2015. - № 2. – С. 101-105.
33. Марченко Б.Г. Белые шумы в колебательных системах / Б.Г. Марченко, М.В. Мыслович. – Киев: ИЭД, 1989. – 42 с.
34. Марченко Б.Г. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин / Б.Г. Марченко, М.В. Мыслович. – К.: Наук. думка, –1992. – 195с.
35. Марченко Б.Г. Лінійні періодичні процеси / Б.Г. Марченко // Електроенергетика. – 1999. – Вип. 3. – С. 172-185.
36. Марченко Б.Г. Линейные случайные процессы и их приложения / Б.Г. Марченко, Л.Н. Щербак. – К.: Наукова думка, 1975. – 144 с.
37. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – К.: Наукова думка, 1973. – 192 с.
38. Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике / В.Б. Марченко. – К.: Наук. думка, 1992. – 212 с.
39. Методи оцінювання точності інформаційно-вимірвальних систем діагностики: монографія / [Н.Б. Марченко, В.В. Нечипорук, О.П. Нечипорук, Ю.В. Пепа]. – К.: НАУ, 2014. – 200 с.
40. Мыслович М.В. Периодически коррелированные случайные процессы в задачах обработки акустической информации / М.В. Мыслович, Н.В. Приймак, Л.Н. Щербак. – Киев: Знание, 1980. – 25 с.
41. Никифоров И. В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов / И. В. Никифоров. – М.: Наука, 1983. – 200 с.
42. Отнес Р. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы / Р. Отнес, Л. Эноксон. – М.: Мир, 1982. – 428 с.

43. Оценка качества генераторов случайных чисел / [Т. В. Митянкина, В. В. Швыдкий, А. И. Щерба, М. А. Митянкин] // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2009. – № 1. – С. 41-46.
44. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин / В.В. Петров. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
45. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов / С.А. Прохоров. – Уральск: ТОО «Экспо», 2001. – 209 с.
46. Романенко А.Ф. Аппроксимативные методы анализа случайных процессов / А.Ф. Романенко, Г.А. Сергеев. – М.: «Энергия», 1974. – 180 с.
47. Рубичев Н.А. Измерительные информационные системы: [учебное пособие] / Н.А. Рубичев. – М.: Дрофа, 2010. – 334 с.
48. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения / В.В. Сенатов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 352 с.
49. Соколовська Г.В. Задача измерения характеристик стационарных процессов / Г.В. Соколовська // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці НАН України. – 2014. – Вип. 70 – С. 21-27.
50. Соколовська Г.В. Моделювання завод в задачах передачі та обробки сигналів / Г.В. Соколовська, Л.М. Щербак // Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. праць. – 2011. – Вип. 59. – С.76-82.
51. Соколовська Г.В. Статистичний аналіз генераторів псевдовипадкої послідовності у програмних середовищах Matlab та Mathcad / Г.В. Соколовська // Моделювання та інформаційні технології: зб. наукових праць. – 2013. – Вип. 66. – С. 26-30.
52. Теоретические основы информационно-измерительных систем: [учебник] / [В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Еременко и др.]; под ред. чл.-кор. НАН Украины В.П. Бабака. – К.: «Софія-А», 2014. – 832 с.
53. Уилкс С. Математическая статистика/ С. Уилкс; [пер. с англ.]. – М.: Наука, 1967. – 632 с.

54. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигнала / С.Е. Фалькович. – М.: Сов. радио, 1979. – 336 с.
55. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ / А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1969. – 232 с.
56. Яворський І. М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань / І.М. Яворський. – Львів: ФМІ НАНУ, 2013. – 804 с.
57. Elsner J. B. Singular Spectrum Analysis: A New Tool in Time Series Analysis // J. B. Elsner, A. Tsonis.— New York, London: Plenum Press, 1996.— 164 p.
58. Entacher K. A collection of classical pseudorandom number generators with linear structures – advanced version. [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Режим доступу: random.mat.sbg.ac.at/results/karl/server/server.html (дата звернення 05.02.2016). – Назва з екрана.
59. Final report of European project number IST-1999-12324, named New European Schemes for Signatures, Integrity, and Encryption // Springer-Verlag, 2004. – Version 0.15 (beta). – P 829.
60. Gentle E. Random Number Generation and Monte-Carlo Methods / E. Gentle. [2nd. ed.]. – Germany, Berlin: Springer, 2005. – 397 p.
61. Gupta S. Application of electrical noise / S. Gupta // IEEE. – V. 63. – № 9. – pp. 5-21.
62. Hartigan J. The Dip Test of Unimodality / J. A. Hartigan; P. M. Hartigan // The Annals of Statistics. – Vol. 13, №. 1. – 1985. – pp. 70-84.
63. L'Ecuyer P. TestU01: A C Library for empirical testing of random number generators / P. L'Ecuyer, R. Simard // ACM Transactions on Mathematical Software, 2007.
64. Josefsson A. On Nonlinear Parameter Estimation with Random Noise Signals / A. Josefsson, M. Magnevall, K. Ahlin // IMAC XXV, 2007.
65. National Institute of Standards and Technology, “FIPS-197: Advanced Encryption Standard.” [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Режим доступу:

nvlpubs.nist.gov/nistpubs/FIPS/NIST.FIPS.197.pdf (дата звернення 09.05.2017). – Назва з екрана.

66. Random number generation. [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Режим доступу: mandala.co.uk/links/random/ (дата звернення 23.07.2015). – Назва з екрана.

67. Rukhin A. A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications. NIST, 2001 [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Режим доступу:

<http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/SP/nistspecialpublication800-22r1a.pdf> (дата звернення 15.02.2016). – Назва з екрана.

68. Soto J. Randomness Testing of the Advanced Encryption Algorithms /J. Soto // NIST, 1999.

**More
Books!** 



yes
I want morebooks!

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.get-morebooks.com

Kaufen Sie Ihre Bücher schnell und unkompliziert online – auf einer der am schnellsten wachsenden Buchhandelsplattformen weltweit!
Dank Print-On-Demand umwelt- und ressourcenschonend produziert.

Bücher schneller online kaufen
www.morebooks.de

SIA OmniScriptum Publishing
Brivibas gatve 197
LV-103 9 Riga, Latvia
Telefax: +371 68620455

info@omniscryptum.com
www.omniscryptum.com

OMNI Scriptum



